ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

10/06/2019

ΘΕΜΑ Α.

Α1. α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

β) (i) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35.

(ii) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35-36.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Α4. α) Λάθος. Για παράδειγμα:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

Σχολικό βιβλίο σελίδα 134.

β) Λάθος. Για παράδειγμα:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$$

Σχολικό βιβλίο σελίδα 71.

Α5. Σωστή απάντηση είναι η **(γ)**.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Αφού η $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow \lambda=2,$$

αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{u\to-\infty} e^{u}=0.$$

B2. Θεωρούμε την

$$g(x) = f(x) - x \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} + 2 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

- g συνεχής στο $[2,3]$.
- $g(2) = e^{-2} > 0$ και
  $g(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$, επομένως,
  $$g(2) \cdot g(3) < 0.$$

Άρα, από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0.$$

Άρα, η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο της g:

$$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, και επομένως, η $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, η οποία ανήκει στο $(2,3)$.

B3. Έχουμε:

$$f'(x) = -e^{-x} < 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι και 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα, για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, έχουμε:

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (2, +\infty),$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty,$$

διότι,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{u} = +\infty.$$

Για $y \in (2, +\infty)$, θέτουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2), \quad \text{για } y > 2.$$

Άρα,

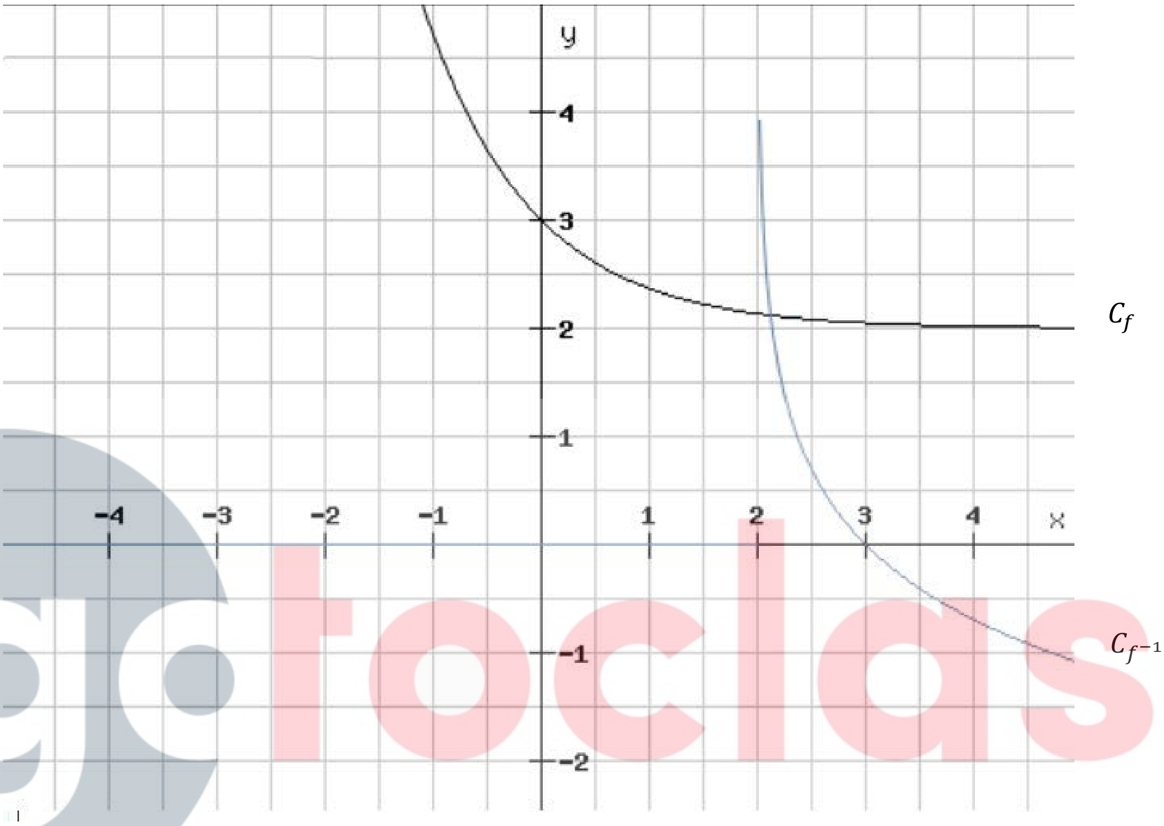
$$f^{-1}(x) = -\ln(x-2), \quad x > 2.$$

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}[-\ln(x-2)] \underset{(u\to 0^+)}{\overset{(u=x-2)}{=}} \lim_{u\to 0^+}[-\ln u] = -\lim_{u\to 0^+}(\ln u) = +\infty.$$

Άρα, η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1. $A_f=\mathbb{R}$f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε η f συνεχής *στο* $\mathbb{R}$

Επομένως η fσυνεχής στο x=1

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1+} x^2+a = \lim\limits_{x\to 1-} e^{x-1}+\beta x = 1+a \Leftrightarrow 1+a=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Επίσης η fπαραγωγίσιμη στο x=1 άρα

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}$$

$$\overset{a=\beta}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{e^x-1}{x-1}+\frac{ax-a}{x-1}\right) \Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} e^{x-1} = 1}$$

$$2 = \lim_{x\to 1-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1-}\frac{a(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$2 = 1+a \Leftrightarrow a=1 \; ά\rho\alpha \; \kappa\alpha\iota \; \beta=1.$

Γ2.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

●*x>1* $\quad f'(x)=2x>0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa ά\theta\varepsilon \; x>1$

●*x<1* $\quad f'(x)= e^{x-1}(x-1)'+1=e^{x-1}+1>0 \; \gamma\iota\alpha \; \kappa ά\theta\varepsilon \; x<1$

●*x=1* $f'(1)=2$ *από ερώτημαΓ1.*

Άρα $f'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *επομένως* f *γνησίως αύξουσα στο*$\mathbb{R}$

f *συνεχής και γν. αύξουσα στο* $\mathbb{R}$ *άρα* $f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) =$

$=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1} + \lim\limits_{x\to-\infty} x = 0-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Γ3.

i) $f\big((-\infty,0)\big) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0-} f(x)) = (-\infty, e^{-1})$

0$\in f\big((-\infty,0)\big)$ *άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο* $x_o\in(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$ *η οποία είναι μοναδική στο* $\mathbb{R}$ *λόγω μονοτονίας.*

ii) ***α' τρόπος***

Έστω $f(x_o)=0 \Leftrightarrow e^{x_o-1}+x_o=0$ (1)

Έχουμε ότι για $x>x_0 \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} f(x)>f(x_O) \Leftrightarrow f(x)>0$, *για κάθε* $x>x_0$

Η εξίσωση γράφεται $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0 \xLeftrightarrow{f(x)>0 \;\forall x>x_o} f(x)=x_O$ *(*)*

Όμως $f((x_O,+\infty)) = \lim_{x\to x_o} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (f(x_o,+\infty) = (0,+\infty)$

Άρα $x_O\notin f(x_o,+\infty)$ *αφού* $x_O<0$

Άρα η (*) είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$

β' τρόπος

Θεωρούμε g(x)=$f^2(x) - xof(x) \quad x \geq xo$

$g'(x) = 2 - f(x)f'(x) - xof'(x) = f'(x)(2f(x) - xo) \quad x \geq xo$

$H\ g συνεχής\ στο\ [xo, +\infty)$*ως σύνθεση και διαφορά συνεχών συναρτήσεων*

$f'(x) > 0\ \ για\ κάθε\ x > xo$

$-xo > 0\ \ αφού\ xo < 0$

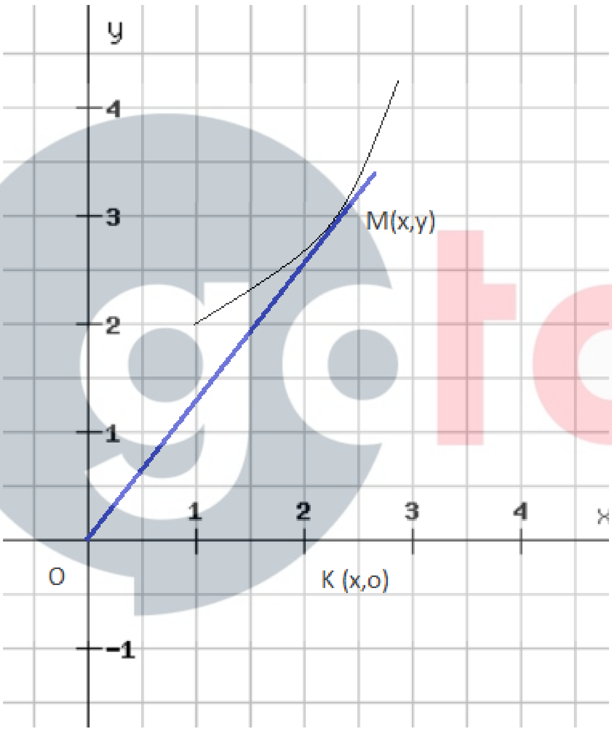
$Για\ x \geq xo \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}\ f(x) \geq f(xo) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$Άρα g'(x) > 0\ για\ κάθε\ x \geq xo\ \ άρα\ g γν.αύξουσα\ \ στο [xo, +\infty)$

$Για\ x > xo \xLeftrightarrow{g\nearrow[xo,+\infty)} g(x) > g(xo) \Leftrightarrow g(x) > 0,\ για\ κάθε\ x > xo$

$Άρα\ η\ εξίσωση\ g(x) = 0\ είναι\ αδύνατη\ στο\ (xo, +\infty)$

Γ4.



E= $\frac{βυ}{2} = \frac{(OK)(MK)}{2} = \frac{xf(x)}{2} = \frac{x(x^2+1)}{2} = \frac{x^3+x}{2}$

$ΆραE(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}\ \ , t \geq 0$

$E'(t) = \frac{1}{2}\left[3x^2(t)x'(t) + x'(t)\right] = \frac{1}{2}x'(t)(3x^2(t) + 1), t \geq 0$

$Για t = to\text{:}\ \ E'(to) = \frac{1}{2}x'(to)[3x^2(to) + 1] = \frac{1}{2} \cdot 2[3 \cdot 3^2 + 1] = 28 τετ.μονάδες/sec$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x - 1) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει ότι:

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1. \ (1)$
- $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1. \ (2)$

Από τις (1) και (2), προκύπτει $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Συνεπώς,

$$f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Έστω

$$A(x) = f(x) - (-x + 2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 \\ &= (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 1 + 1) \\ &= (x - 1) \cdot \ln((x - 1)^2 + 1), \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση A είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι συνεχής και στο $[1,2]$. Παρατηρούμε ότι για $x \in [1,2]$:

- $x - 1 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
- $\ln((x - 1)^2 + 1) \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, εφόσον $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 1$.

Άρα, $A(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [1,2]$. Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_1^2 |A(x)| \ dx = \int_1^2 A(x) \ dx = \int_1^2 (x - 1) \cdot \ln((x - 1)^2 + 1) \ dx.$$

Θέτουμε $u = (x - 1)^2 + 1$. Οπότε:

$$du = 2(x - 1)dx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = (x - 1)dx.$$

Ακόμη,

- $x_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1.$
- $x_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 2.$

Άρα,

$$E = \int_1^2 \ln u \, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u \; du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u]_1^2 = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 2 + 1) = \frac{2\ln 2 - 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3. (i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln((x-1)^2 + 1) + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 \geq -1,$$

που ισχύει, διότι:

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \overset{\ln x \nearrow}{\Longleftrightarrow} \ln((x-1)^2 + 1) \geq 0.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η ισότητα

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0$$

ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Επίσης, η ισότητα:

$$\ln((x-1)^2 + 1) \geq 0$$

ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$. Συνεπώς, η ισότητα $f'(x) = -1$ ισχύει αν και μόνο αν $x = 1$.

(ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq [(\lambda - 1)\ \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2] - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} \geq -1 \quad (*)$$

Για $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει $\lambda+\frac{1}{2}>\lambda$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$, με

$$f'(x_0)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}.$$

Όμως, από **Δ3(i)**, ισχύει $f'(x_0) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$. Άρα, η $(*)$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ4. Η ευθεία $y=-x+2$ εφάπτεται στην C_f. Λύνουμε:

$$g(x)=-x+2 \Leftrightarrow -x^3-x+2=-x+2$$

$$\Leftrightarrow -x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Άρα, η $y=-x+2$ τέμνει την C_g στο σημείο με τετμημένη 0. Η εφαπτομένη της C_g στο 0 είναι:

$$y-g(0)=g'(0)(x-0)$$

Είναι $g'(x)=-3x^2-1$, άρα, $g'(0)=-1$, επομένως,

$$y-2=-1\cdot x \Leftrightarrow y=-x+2.$$

Άρα, η $y=-x+2$ είναι κοινή εφαπτομένη για C_f και C_g (στο 1 για την f και στο 0 για την g).

Έστω ότι υπάρχει μια άλλη κοινή εφαπτομένη $y=\lambda x+\mu$ που εφάπτεται με την C_f στο $x_1 \neq 1$ και με την C_g στο x_2. Τότε:

$$f'(x_1)=\lambda>-1 \quad (\text{από } \mathbf{Δ3(i)})$$

$$g'(x_2)=-3x_2^2-1 \leq -1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda \leq -1$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. Συνεπώς, η $y=-x+2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.

Δ4 (β΄ τρόπος).

Έστω $M(x_1, f(x_1))$ σημείο επαφής της C_f με την κοινή εφαπτομένη (ε) και $K(x_2, g(x_2))$ σημείο επαφής της C_g με την κοινή εφαπτομένη (ε). Τότε:

$$(\varepsilon): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x - x_1 \cdot f'(x_1) + f(x_1) \quad (1)$$

και

$$(\varepsilon): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x - x_2 \cdot g'(x_2) + g(x_2) \quad (2)$$

Πρέπει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad (*)$$

$$-x_1 \cdot f'(x_1) + f(x_1) = -x_2 \cdot g'(x_2) + g(x_2) \quad (**)$$

όπου $g'(x) = -3x^2 - 1$. Έχουμε:

$$(*) \Leftrightarrow f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \Leftrightarrow (f'(x_1) + 1) + (3x_2^2) = 0.$$

Όμως,

- $f'(x_1) + 1 \geq 0$ για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1 = 1$,
- $3x_2^2 \geq 0$ για κάθε $x_2 \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2 = 0$.

Παρατηρούμε ότι για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ επαληθεύεται και η $(**)$.

Άρα, υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται της C_f στο $M(1, f(1))$ και της C_g στο $K(0, g(0))$ και η οποία έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y = -x + 2.$$

Δ4 (γ΄ τρόπος).

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -3x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

- $g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
- $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ (από **Δ3(i)**).

Συνεπώς

$$g'(x) \leq -1 \leq f'(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν M το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) με την C_f τότε $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in \mathbb{R}$ και

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Αν K το σημείο επαφής της εφαπτομένης (η) με την C_g τότε $K(x_1, f(x_1))$ με $x_1 \in \mathbb{R}$ και

$$(\eta): y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1)$$

Για να έχουν οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη, πρέπει οι (ε) και (η) να ταυτίζονται. Άρα, πρέπει οι συντελεστές των (ε) και (η) να είναι ίσοι μεταξύ τους. Άρα,

$$f'(x_0) = g'(x_1).$$

Όμως, $g'(x_1) \leq -1 \leq f'(x_0)$. Άρα,

$$g'(x_1) \leq -1 \quad \text{και} \quad f'(x_0) \geq -1 \quad \text{και} \quad f'(x_0) = g'(x_1).$$

Συνεπώς,

$$g'(x_1) = -1 \quad \text{και} \quad f'(x_0) = -1$$

και οι ισότητες αυτές ισχύουν μόνο για $x_1 = 0$ και $x_0 = 1$. Τότε οι εφαπτομένες είναι οι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

$$(\eta): y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Άρα, η $y = -x + 2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.