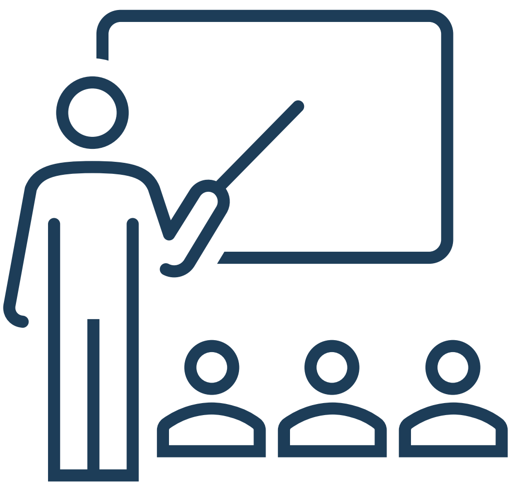
# Διανύσματα Ι

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
## Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ



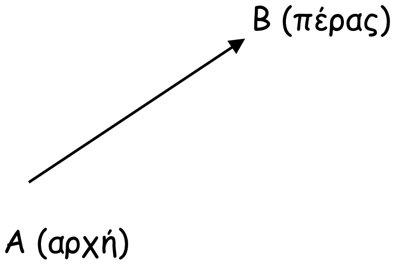
# Περιεχόμενα

# ΘΕΩΡΙΑ

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 1.1, 1.2, 1.3

## ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Το διάνυσμα ορίζεται ως ένα **προσανατολισμένο** ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα που τα άκρα του θεωρούνται διατεταγμένα.



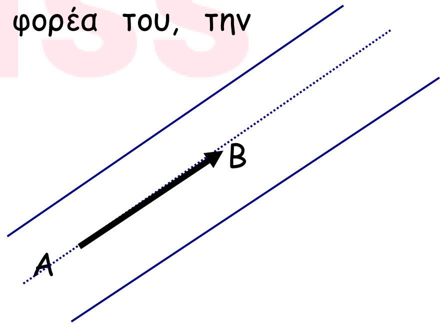

Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** , ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας.**

**Συμβολισμός** :Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$. Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα με μικρά ελληνικά ή λατινικά γράμματα π.χ. : $\vec{\alpha},\vec{\beta}$,......ή...$\vec{u},\vec{v}$,...

## ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Ένα διάνυσμα χαρακτηρίζεται από το μέτρο του, τον φορέα του, την διεύθυνσή του και τη φορά του.

**Μέτρο** ή μήκος ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ λέγεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.



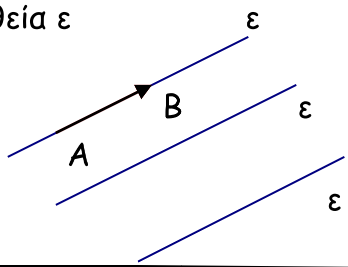

**Φορέας του** $\overrightarrow{AB}$ είναι η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

**Διεύθυνση** ενός διανύσματος λέγεται ο φορέας του ή κάθε ευθεία που είναι παράλληλη προς τον φορέα του.

**Φορά** ενός διανύσματος είναι "το προς τα πού δείχνει το βέλος ".

## ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑ

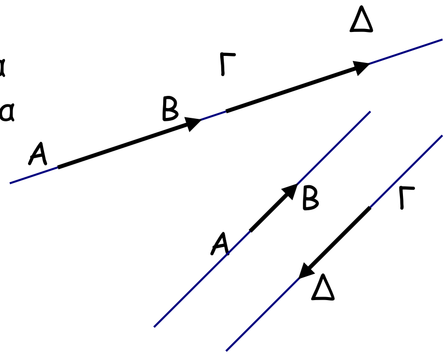
Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς μια ευθεία ε όταν ο φορέας του είναι παράλληλος προς την ε ή ταυτίζεται με την ε.
Γράφουμε: $\overrightarrow{AB}$//ε



## ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ Ή ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

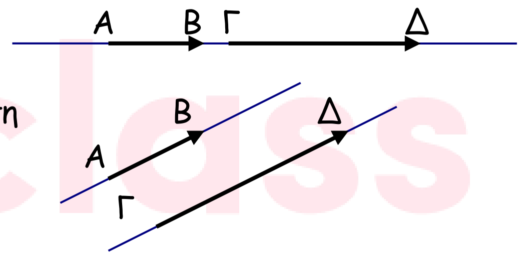
Δύο διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα.

Συμβολισμός : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$




<u>Σχόλιο</u> : Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέμε ότι έχουν την **ίδια διεύθυνση**.

**<u>Τα παράλληλα (συγγραμμικά) διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα.</u>**
**<u>Συγκεκριμένα:</u>**

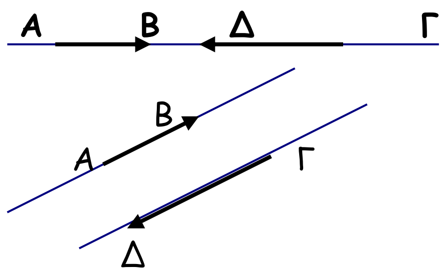



**<u>ΟΜΟΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u> :**
Δύο διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά λέγονται ομόρροπα.
Συμβολισμός : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

**<u>Σχόλιο</u>** : τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά λέμε ότι έχουν την **ίδια κατεύθυνση**

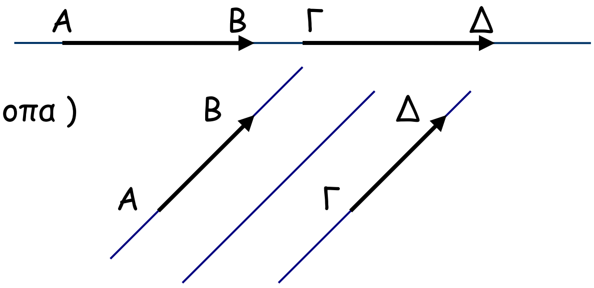
**<u>ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ</u>**
Δύο διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά λέγονται αντίρροπα

Συμβολισμός : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$




**<u>Σχόλιο</u>** : τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά λέμε ότι έχουν **αντίθετη κατεύθυνση.**

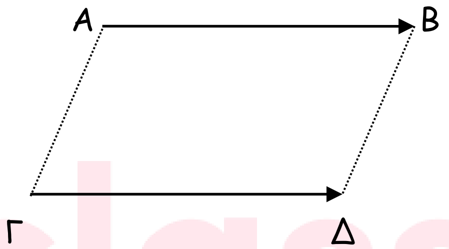
# ΙΣΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ




Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα αν έχουν την ίδια κατεύθυνση ( είναι ομόρροπα ) και το ίδιο μέτρο.
Συμβολισμός $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Δηλαδή : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \qquad \kappa\alpha\iota \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|}$

<u>Παρατήρηση 1η</u>




Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε ισχύει $\begin{cases} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta} \\ \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A} \\ \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \end{cases}$

<u>Παρατήρηση 2η</u>


Μ μέσο του ΑΒ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

<u>ΤΟ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ</u>

**Το μηδενικό διάνυσμα είναι το διάνυσμα που η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν.**

Συμβολίζεται με $\overrightarrow{AA}$ και έχει μέτρο ίσο με 0 ($\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0$).

Φορέας του είναι κάθε ευθεία που διέρχεται από το Α και φορά έχει όποια θέλουμε.

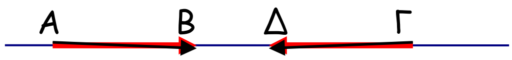
Όλα τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$.

Το μηδενικό διάνυσμα μπορούμε να το θεωρήσουμε παράλληλο, κάθετο, ομόρροπα, αντίρροπο προς οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

## ΤΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Μοναδιαίο λέγεται το διάνυσμα που έχει μέτρο ίσο με 1. Δηλαδή αν το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο τότε $|\vec{\alpha}| = 1$.

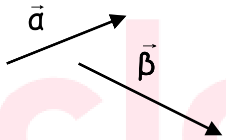
## ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ




Δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα
αν έχουν αντίθετη κατεύθυνση ( αντίρροπα)
και το ίδιο μέτρο.
Γράφουμε : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

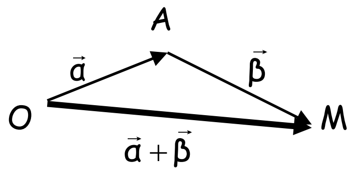
<u>Προσοχή</u> : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

## ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

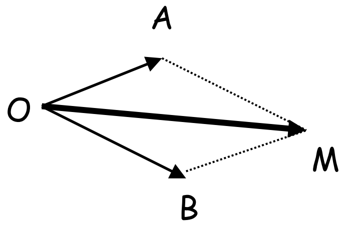



Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Για να βρούμε το άθροισμά τους
έχουμε δύο τρόπους:

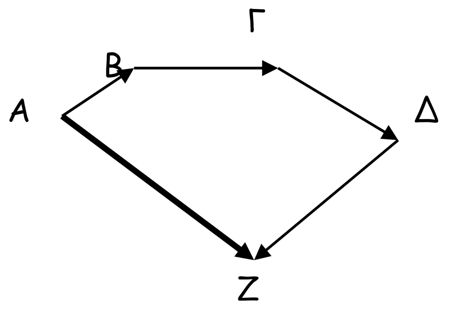
**<u>1ος τρόπος</u>** : Τα διανύσματα τα κάνω διαδοχικά. Από το τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου παίρνω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AM} = \vec{\beta}$.
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται το άθροισμα
των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Γράφουμε : $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$




**<u>2ος τρόπος</u>** : Ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Τα δύο διανύσματα τα κάνω με κοινή αρχή. Από το τυχαίο σημείο Ο
του επιπέδου παίρνω τα διανύσματα
$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$
Τότε $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$




**<u>Σχόλιο</u>**
Για να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα θα πρέπει να τα κάνουμε διαδοχικά, όπως αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




$$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta Z}$$

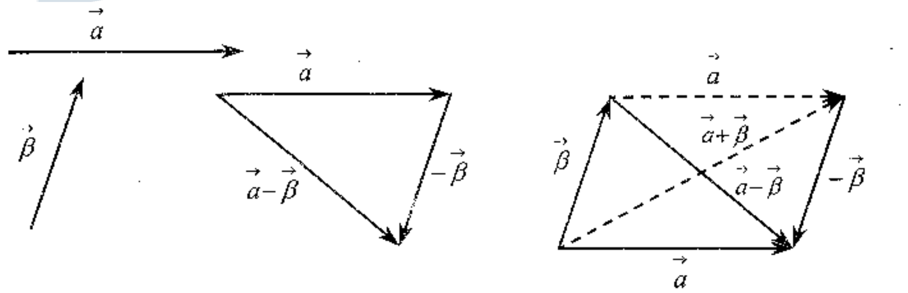
<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ</u>

1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ [αντιμεταθετική]
2. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ [Προσεταιριστική]
3. $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$
4. $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

## ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Η διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$

Δηλαδή $\boxed{\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})}$

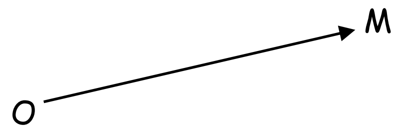



**<u>Συνέπεια</u>**

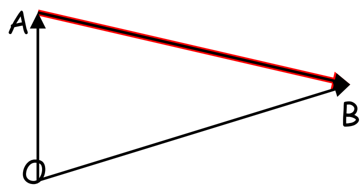
Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$. Πράγματι,

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow (-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = (-\vec{\beta}) + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

## ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΗΣ




Έστω O σταθερό σημείο του χώρου.
Αν M είναι ένα τυχαίο σημείο του χώρου
το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται ***διάνυσμα θέσης***
***του σημείου M ή διανυσματική ακτίνα του M.***
**Το σημείο O λέγεται σημείο αναφοράς.**




**Παρατήρηση:**
Αν O σημείο αναφοράς τότε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$
γράφεται στη μορφή: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

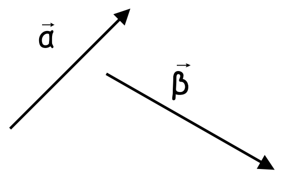
Πράγματι:

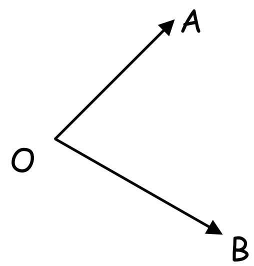
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Δηλαδή : ***Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.***

## ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

**Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$. Για να μπορέσουμε να βρούμε τη γωνία που σχηματίζουν πρέπει να τα βλέπω ή να τα κάνω με κοινή αρχή.




( $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ )

Τότε γωνία των δύο διανυσμάτων ονομάζουμε την **κυρτή** γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζουν οι ημιευθείες OA και OB.

Συμβολισμός : $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right) = \theta$ και ισχύει $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$.

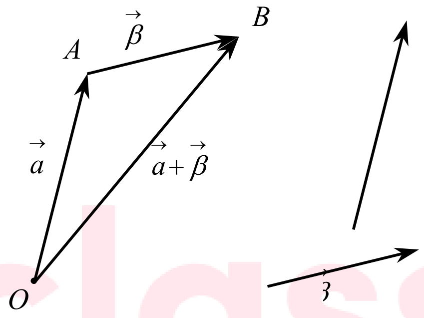
Παρατηρήσεις

1. $$\begin{bmatrix} \bullet\theta = 0^\circ & \Leftrightarrow & \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \\ \bullet\theta = 180^\circ & \Leftrightarrow & \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \\ \bullet\theta = 90^\circ & \Leftrightarrow & \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \end{bmatrix}$$

2. Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε θεωρούμε γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ οποιαδήποτε γωνία θ με $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

## *ΜΕΤΡΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ( Τριγωνική Ανισότητα)*

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι




$$|(OA)-(AB)| \leq (OB) \leq (OA)+(AB)$$

και επομένως

$$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

**Ειδικότερα:**

**A.** Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα τότε:

$$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| < |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| < |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

**B.** Αν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε :

- $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ ( 1η Συνθήκη ομορρόπων διανυσμάτων)
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$ ( 1η Συνθήκη αντίρροπων διανυσμάτων)

## ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

**<u>Ορισμός</u>** :

Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το** $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο :

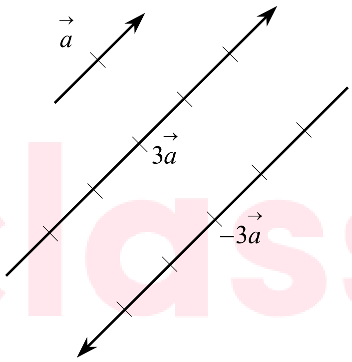
- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ αν λ > 0 και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ αν λ < 0
- έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$

Αν λ=0 ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda\vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

<u>Σχόλιο</u> : Το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του διπλανού σχήματος έχει μέτρο 2, τότε το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$, αλλά έχει και αυτό μέτρο ίσο με $|-3\vec{\alpha}| = |-3||\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.




## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

$$(1) \qquad \lambda\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

$$(2) \qquad \left(\lambda + \mu\right)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}, \qquad \lambda,\mu \in R$$

$$(3) \qquad \lambda\left(\mu\vec{\alpha}\right) = \left(\lambda\mu\right)\vec{\alpha}$$

Επίσης ισχύουν:

$$(4) \qquad \left(-\lambda\vec{\alpha}\right) = \lambda\left(-\vec{\alpha}\right) = -\left(\lambda\vec{\alpha}\right)$$

$$(5) \qquad \left(\lambda - \mu\right)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}, \qquad \lambda,\mu \in R$$

## ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

**Γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής : $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in R$.

<u>Σχόλιο</u>

Η έννοια του γραμμικού συνδυασμού γενικεύεται και σε περισσότερα από δύο διανύσματα.

<u>Παράδειγμα</u>

Το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

## ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

<u>Θεώρημα:</u>

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε : $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}, \quad \lambda \in R$

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$ *και* $\vec{v} = 4\vec{a} - 6\vec{\beta}$, τότε ισχύει:

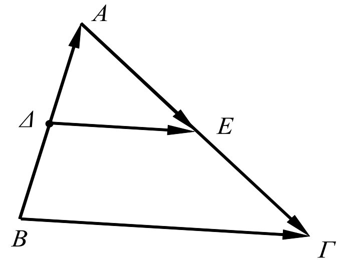
$\vec{v} = 4\vec{a} - 6\vec{\beta} = 2\left(2\vec{a} - 3\vec{\beta}\right) = 2\vec{u}$, *οπότε* $\vec{v} // \vec{u}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει μέτρο 2 τότε το διάνυσμα που έχει μέτρο 6 ( 6 = 2 • 3) και είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ είναι το $3\vec{\alpha}$, ενώ το διάνυσμα που έχει μέτρο 6 και είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ είναι $-3\vec{\alpha}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Στο παρακάτω σχήμα αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:




$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{\Delta E}.$$

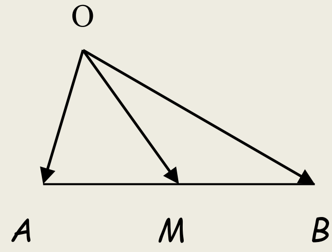
Αφού λοιπόν $\overrightarrow{B\Gamma}=2\overrightarrow{\Delta E}$, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E \,//\, B\Gamma$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=2|\overrightarrow{\Delta E}|$, που σημαίνει ότι $\Delta E=\frac{1}{2}B\Gamma$. Ξαναβρίσκουμε δηλαδή τη γνωστή μας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σχέση $\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}$.

<u>Συνέπειες:</u>

| | |
|---|---|
| 1. | $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$ |
| 2. | Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ (διαγραφή μη μηδενικού αριθμού) |
| 3. | Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$ (διαγραφή μη μηδενικού διανύσματος) |
| 4. | • $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda>0$ ( $2^{\eta}$ Συνθήκη ομορρόπων διανυσμάτων)<br>• $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda<0$ ( $2^{\eta}$ Συνθήκη αντιρρόπων διανυσμάτων) |

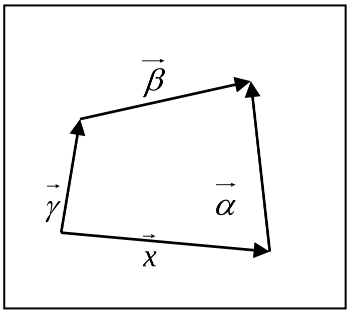


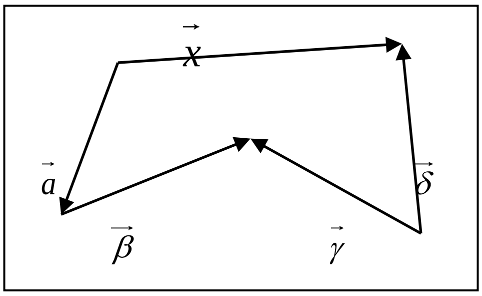
| ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ |
|---|
| *Έστω Μ μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και Ο ένα σημείο αναφοράς τότε αναφοράς τότε :* $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ |

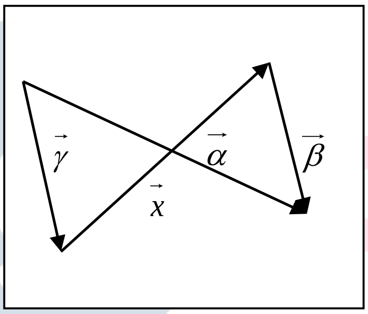


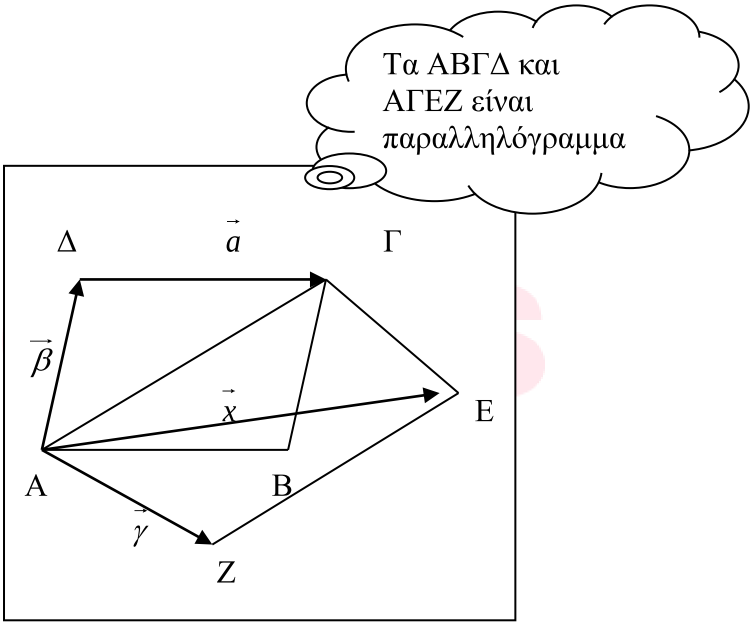
## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

**1.** Να εκφράσετε το $\vec{x}$, συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ στα παρακάτω σχήματα:




**2.** Αν τα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ είναι τυχαία σημεία να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$\alpha)\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=$

$\beta)\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}=$

$\gamma)\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{A\Gamma}=$

$\delta)\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{A\Delta}=$

$\varepsilon)\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{B\Gamma}=$

$\sigma\tau)\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{\Delta Z}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ZB}=$

**3.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος και γιατί.

$\alpha)\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O\Gamma}$

$\beta)\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

$\gamma)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

$\delta)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$

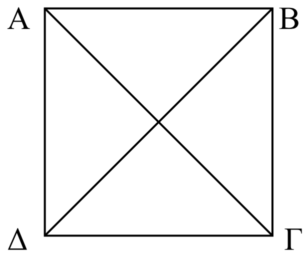
$\varepsilon)\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$

$\sigma\tau)\overrightarrow{A\Gamma} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Delta B}$

$\zeta)\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

$\eta)\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$

$\theta)\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{B\Delta}\right|$




**4.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και γωνία Α=30°. Να βρείτε τις γωνίες των διανυσμάτων:

$\alpha)(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}})$ $\beta)(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma A}})$

$\gamma)(\widehat{\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{BA}})$ $\delta)(\widehat{\overrightarrow{B\Gamma},\overrightarrow{AB}})$

**5.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

**6.** Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{\mathbf{AE}}-\overrightarrow{\mathbf{\Gamma\Delta}}=\overrightarrow{\mathbf{B\Gamma}}+\overrightarrow{\mathbf{\Delta E}}-\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

**7.** Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathbf{M\Gamma}}+\overrightarrow{\mathbf{M\Delta}}=\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathbf{\Delta B}}$.

**8.** Έστω ότι για τα μη συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ και Κ ισχύει $\overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{K\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

**9.** Έστω το τετράπλευρο ΑΒΕΓ για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{\mathbf{A\Delta}} - \overrightarrow{\mathbf{B\Delta}} = \overrightarrow{\mathbf{\Delta E}} - \overrightarrow{\mathbf{\Delta\Gamma}}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

**10.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ρ του χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{\mathbf{PA}} + \overrightarrow{\mathbf{P\Gamma}} = \overrightarrow{\mathbf{PB}} + \overrightarrow{\mathbf{P\Delta}}$

**11.** Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathbf{\Delta E}} = \overrightarrow{\mathbf{\Delta\Gamma}} + \overrightarrow{\mathbf{BE}}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ταυτίζονται (δηλαδή ότι $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \vec{0}$).

**12.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta} = 3\vec{\alpha},\ \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha}$.

α) Να βρείτε ποια από τα παραπάνω διανύσματα είναι ομόρροπα και ποια αντίρροπα.

β) Αν είναι γνωστό ότι $|\vec{\alpha}| = 10$, βρείτε το μέτρο των υπολοίπων διανυσμάτων.

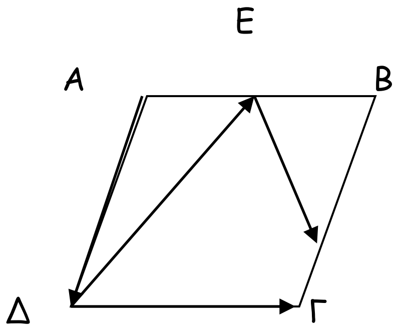
**13.** Να βρείτε το $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha},\ \vec{\beta}$ όταν:

$$2(\vec{x} - \vec{\alpha}) - \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}$$

**14.** Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{x},\ \vec{y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{\alpha} \\ \vec{x} - \vec{y} = \vec{\beta} \end{cases}$ β) $\begin{cases} \vec{x} - 2\vec{y} = \vec{\alpha} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{\beta} \end{cases}$

**15.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο παρακάτω σχήμα με $\overrightarrow{\mathbf{\Delta\Gamma}} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{\mathbf{A\Delta}} = \vec{\beta}$.




Αν Ε είναι το μέσο του ΑΒ και ισχύει $\vec{ΒΖ} = \frac{2}{3}\vec{ΒΓ}$, να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{α}$, $\vec{β}$ τα διανύσματα $\vec{ΔΕ}$, $\vec{ΔΖ}$, $\vec{ΕΖ}$.

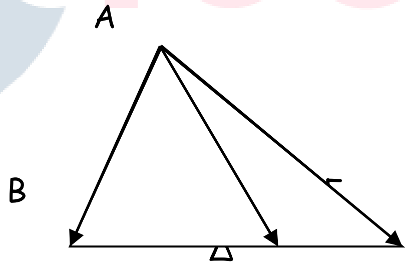
**16.** Αν ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο με $\vec{ΑΒ} = \vec{α}$ και $\vec{ΒΓ} = \vec{β}$

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{ΓΔ}$, $\vec{ΑΕ}$ συναρτήσει των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

β) Δείξτε ότι $\vec{ΑΒ} + \vec{ΑΓ} + \vec{ΑΔ} + \vec{ΑΕ} + \vec{ΑΖ} = 6\vec{ΒΓ}$

( Απ. $\vec{ΓΔ} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$, $\vec{ΑΕ} = 2\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ )

**17.** Αν στο παρακάτω σχήμα είναι (ΒΔ)=5(ΓΔ),




να εκφράσετε το $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{α}$, $\vec{β}$.

**18.** Δίνονται τα συνευθειακά σημεία Α, Β, Μ με το Μ μεταξύ των Α, Β και Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου. Αν $\frac{AM}{MB} = 3$,

να αποδείξετε ότι $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + 3\vec{OB}}{4}$.

**19.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ της διαγωνίου ΑΓ ώστε ΑΕ=ΖΓ=$\frac{1}{4}$**ΑΓ**

α) Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{\Gamma Z}, \overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

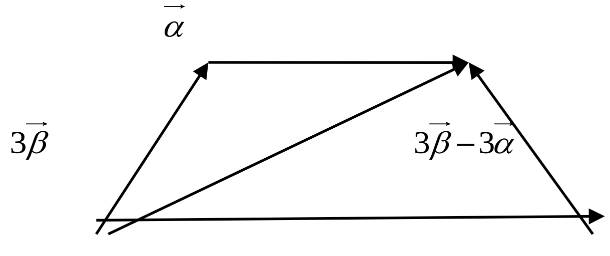
( Απ. $\overrightarrow{\Delta E}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ , $\overrightarrow{\Delta Z}=\frac{1}{4}\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ )

**20.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και θεωρούμε σημείο Ν της διαγωνίου ΒΔ ώστε ΒΝ=3ΝΔ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Delta N}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{\Gamma N}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}$ $\kappa\alpha\iota$ $\vec{\beta}=\overrightarrow{A\Delta}$.

**21.** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\frac{4}{3}\vec{\gamma}$ και $\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{\alpha}-\frac{3}{4}\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

**22.** Αν οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β, Γ, Δ είναι $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{O\Gamma}}=4\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{O\Delta}}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να δείξετε ότι $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}//\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma\Delta}}$.

**23.** Να δείξετε ότι το τετράπλευρο του παρακάτω σχήματος είναι τραπέζιο.




**24.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Delta}=6\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ομόρροπα.

**25.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε:

$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$

α) Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$, $\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

( Απ. $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}} = -\frac{5}{6}\vec{\alpha} + \frac{3}{2}\vec{\beta}$ , $\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}} = -\frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{3}{5}\vec{\beta}$ )

**26.** Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ για τα οποία ισχύει:

$$5\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = 3\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$$

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

**27.** Δίνονται τα σημεία Ο, Α, Β, Γ, από τα οποία τα Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Αν ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = (1-\lambda)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**28.** Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{\alpha} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$, $\vec{\beta} = 5\vec{v} - 2\vec{u}$, να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{v}$ και να βρείτε το μέτρο του $\vec{\gamma}$.

**29.** Αν ισχύει $2\overrightarrow{\mathrm{A\Lambda}} + 3\overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{AK}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BK}}$ να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{K\Lambda}}$, $\overrightarrow{\mathrm{M\Lambda}}$ είναι αντίρροπα.

**30.** Αν $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 6\vec{\beta} - \vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

**31.** Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε ισχύει ότι $3\overrightarrow{\mathrm{EB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 7\overrightarrow{\mathrm{EA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} - 10\overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

**32.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε, Ζ τα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}$.

**33.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ, Λ επί της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΚ=ΚΛ=ΛΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{A\Lambda}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$

**34.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και Ν, Ο τα μέσα ΚΛ, ΝΜ αντίστοιχα και Σ τυχαίο σημείο του χώρου να αποδείξετε ότι: $4\overrightarrow{\Sigma O}=\overrightarrow{\Sigma A}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{\Sigma B}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}\right)$

**35.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{NK}=\dfrac{\overrightarrow{\Delta B}}{2}$

β) Το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

**36.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Να προσδιοριστεί σημείο Μ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Απ. το Μ ταυτίζεται με το Α

**37.** Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ . Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείου Μ του επιπέδου το διάνυσμα $\vec{u}=5\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{M\Gamma}-4\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερό.

**38.** Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{A\Gamma}=x^2\cdot\overrightarrow{AB}$, $x\in R$ $\overrightarrow{B\Gamma}=8\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι $x=\pm 3$.

**39.** Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα

Α) Αν $x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε να δείξετε ότι $x=y=0$.

Β) Αν $x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}$, τότε να δείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

Γ) Θεωρούμε τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{w}=2\vec{a}+(3x-1)\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{a}+(x-2)\vec{\beta}$, $x\in R$ για τα οποία ισχύει $\vec{w}=\lambda\vec{v}$, $\lambda\in R$. Να βρείτε τους αριθμούς λ, x.