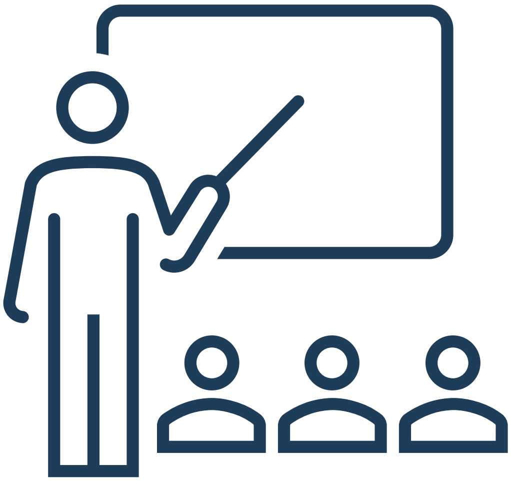
Κεφάλαιο 1: Καμπυλόγραμμες κινήσεις

Οριζόντια βολή [Τεύχος Α΄]

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

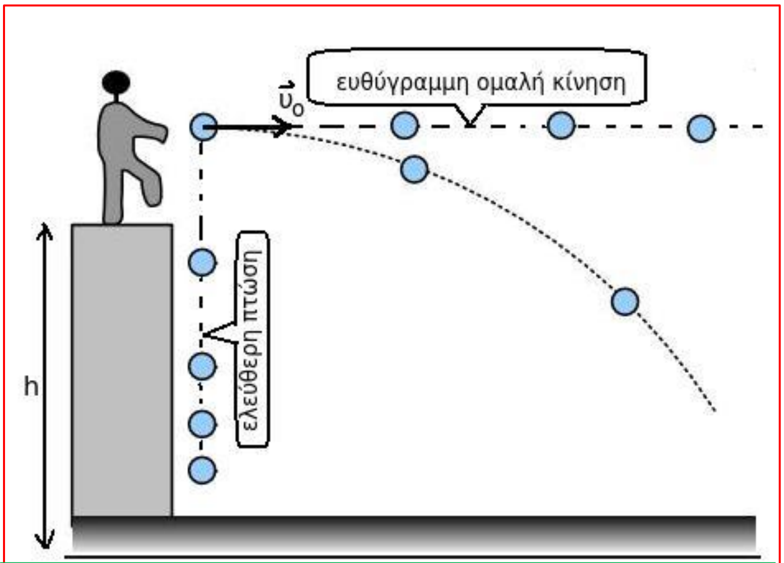


Περιεχόμενα

ΘΕΩΡΙΑ

1) Ποια κίνηση ονομάζουμε οριζόντια βολή;

Από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας ύψους h, ένα παιδί, εκτοξεύει μια μπάλα με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ (σχήμα 1). Κατά την διάρκεια της κίνησης της μπάλας θεωρούμε ότι δέχεται μόνο το βάρος της, δηλαδή αγνοούμε οποιαδήποτε αντίσταση από τον αέρα. Η μπάλα αυτή θα εκτελέσει μια κίνηση την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε σύνθετη και η οποία αποτελείται από δυο απλές κινήσεις:



Σχήμα 1: Πετάμε ένα σώμα οριζόντια και το φωτογραφίζουμε σε ίσα χρονικά διαστήματα. Παίρνουμε έτσι μια ιδέα της κίνησης που ονομάζουμε οριζόντια βολή.

α) μια κατακόρυφη κίνηση που είναι ελεύθερη πτώση, αφού στην κατακόρυφη διεύθυνση δεν έχει αρχική ταχύτητα και δέχεται μόνο τη δύναμη του βάρους.

β) μια οριζόντια κίνηση που είναι ευθύγραμμη ομαλή, αφού στην οριζόντια διεύθυνση δεν δέχεται καμμία δύναμη και έχει αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$.

Η σύνθετη αυτή κίνηση ονομάζεται οριζόντια βολή.

2) Πως διατυπώνεται η αρχή ανεξαρτησίας (επαλληλίας) των κινήσεων;

Εάν υποθέσουμε ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα περισσότερες από μια κινήσεις τότε κάθε μια από αυτές εκτελείται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και η θέση στην οποία φτάνει το σώμα μετά από χρόνο t είναι η ίδια είτε οι κινήσεις εκτελούνται ταυτόχρονα είτε εκτελούνται διαδοχικά σε χρόνο t η καθεμία.

3) Με ποιες σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα και τη μετατόπιση ενός σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα δυο κινήσεις

Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δυο κινήσεις. Την χρονική στιγμή t εξαιτίας της κίνησης (1) έχει μετατοπιστεί κατά $\vec{x}_1$ από την αρχική του θέση ενώ έχει αποκτήσει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Παρόμοια λόγω της κίνησης (2) την ίδια στιγμή t θα έχει μετατοπιστεί κατά $\vec{x}_2$ και θα εχει μια ταχυτητα $\vec{\upsilon}_2$. Αφού όπως περιγράψαμε πριν οι κινήσεις είναι ανεξάρτητες η μετατόπιση του σώματος από την αρχική του θέση και η ταχύτητα του θα δίνονται τη στιγμή t από τις σχέσεις

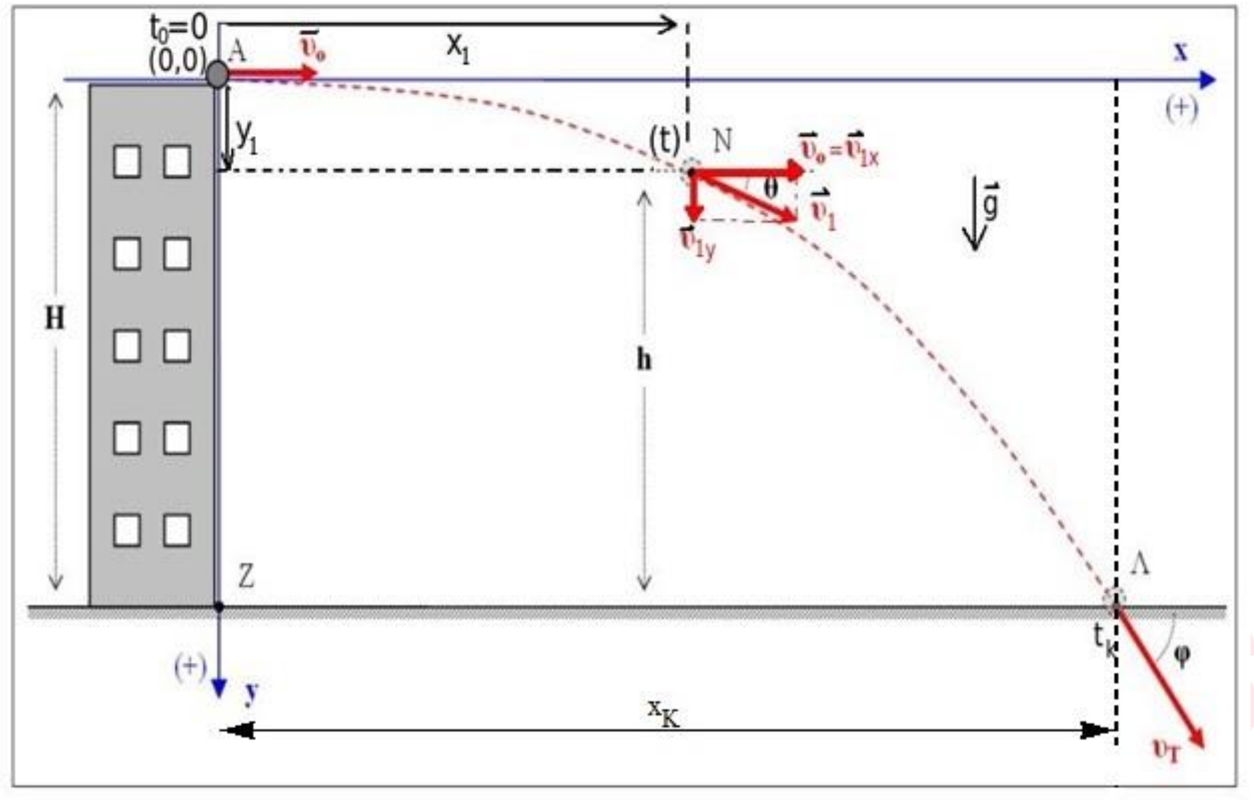
$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2} \quad \textbf{(1.1)}$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει και για την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σώματος δηλαδή:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2} \quad \textbf{(1.2)}$$

Προσοχή: Όλα τα παραπάνω μεγέθη προστίθενται διανυσματικά όπως φαίνεται απ' τους αντίστοιχους τύπους.

4) Πως εφαρμόζεται η αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων στην οριζόντια βολή;



Σχήμα 2: Μελέτη οριζόντιας βολής με την βοήθεια της αρχής ανεξαρτησίας των κινήσεων

Ένα σώμα εκτοξεύεται από ύψος Η (σχήμα 2) πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_0$ και κινείται με την επίδραση μόνο του βάρους του (θεωρούμε αμελητέες τις αντιστάσεις του αέρα). Για τη μελέτη της κίνησης του σώματος θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy με αρχή O το σημείο εκτόξευσης όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Θεωρούμε ως αρχή έναρξης του χρονομέτρου (t_o=0) τη στιγμή της εκτόξευσης επομένως η χρονική διάρκεια της κίνησης ταυτίζεται με τη χρονική στιγμή (την ένδειξη του χρονομέτρου). Η οριζόντια βολή μπορεί να αναλυθεί στις εξής δυο ανεξάρτητες κινήσεις:

- Άξονας Οx: το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_0$ αφού επάνω του δεν ασκείται κάποια δύναμη στην διεύθυνση του άξονα αυτού. Συνεπώς ισχύουν οι τύποι

$$\boxed{v_x = v_0} \ \textbf{(1.3)}, \qquad \boxed{x = v_0 \cdot t} \ \textbf{(1.4)}$$

- Άξονας Οy: Στον άξονα αυτό το σώμα δέχεται μόνο την επίδραση του βάρους του και δεν έχει αρχική ταχύτητα, συνεπώς εκτελεί ελεύθερη πτώση. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\boxed{v_y = g \cdot t} \quad \textbf{(1.5)}, \qquad \boxed{y = \frac{1}{2} g \cdot t^2} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Συνοψίζοντας τις δυο ανεξάρτητες κινήσεις που αποτελούν την οριζόντια βολή έχουμε τον παρακάτω πινάκα:

Άξονας Ox	Άξονας Oy
$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = mg$
$a_x = 0$	$a_y = g$
Ευθύγραμμη Ομαλή	Ελεύθερη Πτώση
$\upsilon_\chi = \upsilon_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$	$\upsilon_y = gt$
$x = \upsilon_0 t$	$y = \frac{1}{2}gt^2$

Η θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από τις συντεταγμένες του (x,y) τις οποίες εκφράσαμε παραπάνω σε συνάρτηση με το χρόνο. Όπως είναι φυσικό η θέση του σώματος αλλάζει σε συνάρτηση με το χρόνο. Έτσι όταν φτάσει στο σημείο Ν τη στιγμή t_1 θα λέμε ότι βρίσκεται στη θέση με $x = x_1$ και $y = y_1$. Δηλαδή έχει μετατοπιστεί οριζόντια (στον Ox) κατά x_1 προς τα δεξιά και κατακόρυφα (στον Oy) κατά y_1 προς τα κάτω.

Η ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή είναι η συνισταμένη των ταχυτήτων των επιμέρους κινήσεων ($\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y$) σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή:

$$\boxed{\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2}} \text{ (μέτρο) } \mathbf{(1.7)} \text{ και } \boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_{1x}}} \text{ (διεύθυνση) } \mathbf{(1.8)}$$

5) Πως υπολογίζεται ο χρόνος κίνησης (t_k) του σώματος μέχρι το σώμα που εκτελεί οριζόντια βολή να φτάσει στο έδαφος;

Το σώμα τη χρονική στιγμή t_0=0 βρίσκεται σε ύψος Η ($y = 0$), συνεπώς για να βρούμε το χρόνο t_k που φτάνει στο έδαφος, δηλαδή έχει κατακόρυφη απομάκρυνση $y = H$ απ' την αρχή Ο, άρα:

$$y = H \text{ ή } \frac{1}{2}gt_k^2 = H \text{ ή } \boxed{t_k = \sqrt{\frac{2H}{g}}} \mathbf{(1.9)}$$

Από την (1.9) παρατηρούμε <u>ότι ο χρόνος πτώσης t_k εξαρτάται μόνο από το ύψος και την επιτάχυνση της βαρύτητας</u>.

6) Με τι ταχύτητα ($\vec{\upsilon}_T$) φτάνει το σώμα που εκτελεί οριζόντια βολή στο έδαφος.

Η τιμή της ταχύτητας θα υπολογιστεί με τη βοήθεια και των δυο κινήσεων, υπολογίζοντας τις ταχύτητες υ_χ και υ_y τη χρονική στιγμή που το σώμα θα φτάσει στο έδαφος ($t = t_k$) και στη συνέχεια βρίσκοντας τη συνισταμένη τους όπως δείξαμε στη σχέση (1.7). Η ταχύτητα στον άξονα Ox παραμένει σταθερή, άρα $\upsilon_{Tx} = \upsilon_0$. Για τον άξονα Oy έχουμε όταν φτάνει στο έδαφος:

$$\upsilon_{Ty} = gt_k = g\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH} \quad \mathbf{(1.8)}$$

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας $\vec{\upsilon}_T = \vec{\upsilon}_{Tx} + \vec{\upsilon}_{Ty}$, άρα το μέτρο της $\vec{\upsilon}_T$ είναι:

$$\upsilon_T = \sqrt{\upsilon_{Tx}^2 + \upsilon_{Ty}^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_T = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH}} \quad \textbf{(1.10)}$$

και η διεύθυνση καθορίζεται απ' την $\varepsilon\varphi\varphi$ (βλέπε τη $\hat{\varphi}$ στο σχήμα 2) και ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_{Ty}}{\upsilon_{Tx}} \xRightarrow{(1.8)} \boxed{\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{2gH}}{\upsilon_0}} \quad \textbf{(1.11)}$$

Παρατηρούμε ότι η τελική ταχύτητα (μέτρο και διεύθυνση) (υ_T) του σώματος λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος εξαρτάται <u>μόνο</u> από <u>την αρχική ταχύτητα και το ύψος</u>.

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε σχετικά με το μέτρο της ταχύτητας που φτάνει στο έδαφος αν εφαρμόζαμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε) για την βολή στην αρχική και τελική θέση της κίνησης του (επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε στο έδαφος)

$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_T^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Όπως είναι προφανές από την Α.Δ.Μ.Ε μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο το μέτρο της ταχύτητας, ενώ για την διεύθυνση θα εφαρμόσουμε πάλι την (1.11).

7) Ποια είναι η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση (βεληνεκές) του σώματος στην οριζόντια βολή;

Η μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) είναι η μετατόπιση στον άξονα Οx απ' την αρχή Ο την στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος δηλαδή για $t=t_k$. Έτσι έχουμε

$$x_k = v_0 t_k \xRightarrow{(1.9)} x_k = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}} \quad \textbf{(1.12)}$$

8) Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς του σώματος;

Τροχιά είναι η γραμμή που προκύπτει αν ενώσουμε όλα τα σημεία από τα οποία διέρχεται το σώμα (διακεκομμένη καμπύλη του σχήματος (2)). Η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες (x,y) του σώματος κάθε χρονική στιγμή ονομάζεται εξίσωση τροχιάς. Προκειμένου να την εξάγουμε απαλείφουμε τον χρόνο από τις εξισώσεις των συντεταγμένων x, y.

$$x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{g}{2v_0^2}\cdot x^2} \quad \textbf{(1.13)}$$

Η εξίσωση τροχιάς (1.12) είναι η εξίσωση παραβολής στα μαθηματικά ($y = ax^2, a = \frac{g}{2v_0} > 0$) για αυτό και η **τροχιά** του σώματος είναι μια **παραβολή**. Άρα η εξίσωση της τροχιάς σε μια κίνηση μας δείχνει το είδος της τροχιάς (καμπυλόγραμμη ή ευθύγραμμη) και αν είναι καμπυλόγραμμη, το είδος της καμπύλης που ακολουθεί το κινητό (παραβολή , έλλειψη κτλ.). Η οριζόντια βολή πάντα είναι κίνηση παραβολικής τροχιάς αφού η εξίσωση της τροχιάς που προκύπτει είναι της μορφής $y = ax^2$. Σε κάθε καμπυλόγραμμη κίνηση η ταχύτητα του κινητού είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη σε κάθε θέση που αυτό βρίσκεται. Έτσι στην οριζόντια βολή η ταχύτητα <u>είναι εφαπτόμενη</u> στην παραβολική τροχιά σε κάθε <u>σημείο</u> της απ' το οποίο περνάει το κινητό. (βλέπε την $\vec{\upsilon}_1$ στη θέση Ν του σχήματος 2)

9) Κατά την διάρκεια της οριζόντιας βολής να δείξετε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ 2 σημείων της τροχιάς του σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας μεταξύ των δυο αυτών σημείων.

Έστω σημεία Α και Γ της τροχιάς ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή. Μπορούμε να εφαρμόσουμε για τα σημεία Α και Γ την Α.Δ.Μ.Ε οπότε έχουμε

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow U_A - U_\Gamma = K_\Gamma - K_A \Rightarrow \boxed{-\Delta U = \Delta K} \quad \textbf{(1.14)}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

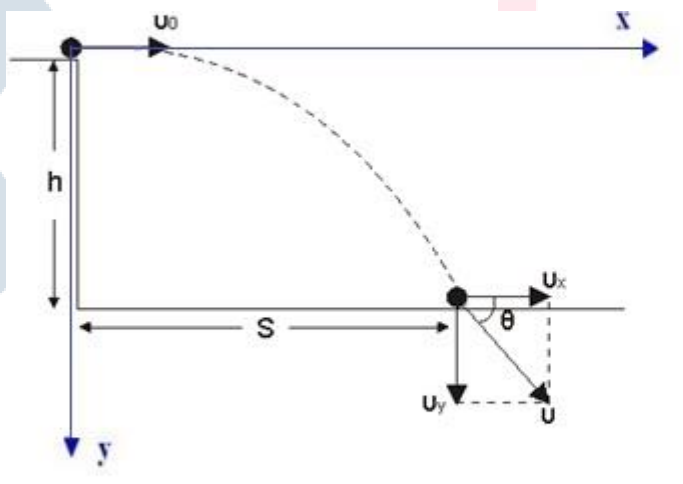
Οριζόντια Βολή	x'x	y'y
	$\Sigma F_x = 0$	$\Sigma F_y = mg$
	$\alpha_x = 0$	$\alpha_y = g$
	$\upsilon_x = \upsilon_0$	$\upsilon_y = gt$
	$x = \upsilon_0 t$	$y = \frac{1}{2} g t^2$
	Ταχύτητα: $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$ μέτρο $\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_x}$ διεύθυνση	
	Χρόνος κίνησης: $t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	
	Βεληνεκές: $x = v_0 t_\kappa = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$	
	Εξίσωση τροχιάς: $y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Λυμένες Ασκήσεις - Ασκήσεις που αναφέρονται στην κίνηση ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή</u>

1. Σώμα εκτοξεύεται από ύψος h=80m με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 30\frac{m}{s}$. Αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, να βρείτε:
α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος.
β) Σε πόση οριζόντια απόσταση θα πέσει το σώμα στο έδαφος (βεληνεκές).
γ) Την ταχύτητα του όταν προσκρούει στο έδαφος.
δ) Την εξίσωση της τροχιάς του σώματος.
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:



α) $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{160}{10}} \Rightarrow \boxed{t = 4s}$.

β) $S = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow S = 30 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{S = 120m}$.

> Ο χρόνος πτώσης $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ εξαρτάται μόνο απ' το ύψος που πραγματοποιείται η βολή και όχι απ' την αρχική ταχύτητα υ_0 του σώματος.

γ) Όταν προσκρούει στο έδαφος η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος θα είναι $\upsilon_x = \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_x = 30\frac{m}{s}$, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα $\upsilon_y = g \cdot t \Rightarrow \upsilon_y = 10 \cdot 4 \Rightarrow \upsilon_y = 40\frac{m}{s}$. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν προσκρούει στο έδαφος θα ισούται με

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 50\frac{m}{s}}$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος θα είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{4}{3}}$.

δ) Με βάση την αρχή της επαλληλίας, για την κίνηση του σώματος στον οριζόντιο άξονα ισχύει:

$x = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{x}{\upsilon_0}$ (1), ενώ στον κατακόρυφο ά … $\dfrac{g}{\upsilon_0^{\,2}} \cdot x^2 \Rightarrow$

> Προσοχή στον περιορισμό που πρέπει να βάλουμε για τη συντεταγμένη x στην εξίσωση τροχιάς γιατί το σώμα παύει να εκτελεί οριζόντια βολή όταν φτάνει στο έδαφος.

$\boxed{y = \dfrac{x^2}{180}}$ (S.I.), $0 \le x \le 120\text{m}$

(παραβολικής τροχιάς γιατί είναι της μορφής $y = \alpha x^2$ με $\alpha = \frac{1}{180} m^{-1}$)

2. Σώμα εκτοξεύεται από ύψος h=125m με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 40\dfrac{m}{s}$ και όταν φτάνει στο οριζόντιο έδαφος σταματά εκεί ακαριαία Αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, να βρείτε:

α) Τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s$ καθώς και τη στιγμή $t_3 = 6\ s$.

β) Την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s$ καθώς και τη στιγμή $t_3 = 6\ s$.

γ) Τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος έχουν ίσα μέτρα.

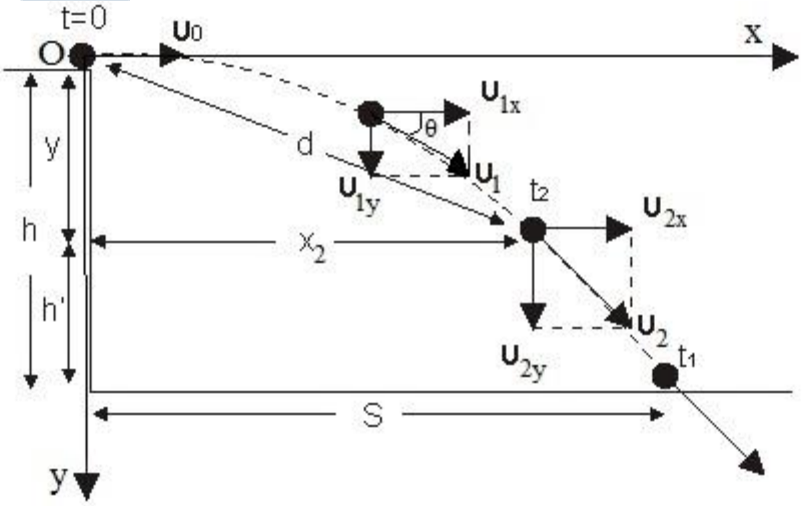
δ) Την απόσταση του σημείου που θα βρίσκεται το σώμα τη χρονική στιγμή t_2 από το σημείο εκτόξευσης του και την απόσταση του από το οριζόντιο έδαφος.

ε) Αν είναι δυνατόν να υπάρξει κάποια χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της κίνησης, στην οποία η κατακόρυφη και η οριζόντια μετατόπιση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης να έχουν ίσα μέτρα.

στ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s$.

Δίνεται $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση:



α) Ο χρόνος κίνησης t_k μέχρι να φτάσει στο έδαφος βρίσκεται απ' τη σχέση $h = \frac{1}{2}gt_k^2 \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_k = 5\ s$.

Άρα τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\ s < t_k$ το σώμα εκτελεί ακόμα οριζόντια βολή και έχει μετατοπιστεί οριζόντια κατά $x_1 = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 80\ m}$ και κατακόρυφα κατά $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow \boxed{y_1 = 20\ m}$.

> Όταν μου ζητούν τη θέση του σώματος μια χρονική στιγμή t_1 ελέγχω πρώτα αν η στιγμή αυτή είναι μικρότερη απ' τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος και κατόπιν παίρνω τις χρονοεξισώσεις των $x_1 = \upsilon_0 t_1$ και $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ και βρίσκω τις αντίστοιχες συντεταγμένες x_1, y_1 που καθορίζουν τη θέση του σώματος.

Άρα το σώμα βρίσκεται στη θέση με $(x_1 = 80\ m, y_1 = 20\ m)$.
Τη χρονική στιγμή $t_3 = 6\ s > t_k$. Άρα το σώμα έχει φτάσει στο έδαφος και έχει μετατοπιστεί στον κατακόρυφο άξονα κατά $\boxed{y_3 = h = 125\ m}$ και στον οριζόντιο άξονα κατά $x_3 = s = \upsilon_0 t_k \Rightarrow \boxed{x_3 = 200\ m}$ (βεληνεκές).

β) Αφού $t_1 < t_k$ θα ισχύουν για τις ταχύτητες:
$\upsilon_{1x} = \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_{1x} = 40\frac{m}{s}$.
$\upsilon_{1y} = gt_1 \Rightarrow \upsilon_{1y} = 20\frac{m}{s}$.
Απ' την αρχή της επαλληλίας ισχύει $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{1x} + \vec{\upsilon}_{1y}$, άρα το μέτρο της ολικής ταχύτητας του σώματος είναι
$|\upsilon_1| = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2} \Rightarrow |\upsilon_1| = \sqrt{40^2 + 20^2} \Rightarrow$
$\boxed{|\upsilon_1| = 20\sqrt{5}\frac{m}{s}}$.
$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_{1x}} = \frac{20}{40}$. Άρα $\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}}$.

Όταν μου ζητούν την ταχύτητα του σώματος μια χρονική στιγμή t_1, αφού ελέγξω ότι το σώμα εκτελεί ακόμα οριζόντια βολή παίρνω τις χρονοεξισώσεις $\upsilon_{1x} = \upsilon_0$ και $\upsilon_{1y} = gt_1$ και βρίσκω τα μέτρα των $\vec{\upsilon}_{1x}$ και $\vec{\upsilon}_{1y}$. Κατόπιν προσθέτω διανυσματικά και το μέτρο της ολικής ταχύτητας δίνεται απ' τη σχέση $|\upsilon_1| = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2}$.

Όταν μου ζητούν την ταχύτητα (όχι μόνο το μέτρο της) πρέπει πάντα να βρίσκω και την $\varepsilon\varphi\theta$ που καθορίζει τη διεύθυνση της ταχύτητας.

γ) Έστω τη χρονική στιγμή t_2 η οριζόντια και η κατακόρυφη ταχύτητα του σώματος έχουν ίσα μέτρα $\upsilon_{2y} = \upsilon_{2x} \Rightarrow gt_2 = \upsilon_0 \Rightarrow 10t_2 = 40 \Rightarrow \boxed{t_2 = 4\ s}$.

δ) Τη χρονική στιγμή t_2 η οριζόντια απόσταση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης θα είναι ίση με $x_2 = \upsilon_0 \cdot t_2 \Rightarrow x_2 = 160m$, ενώ η κατακόρυφη απόσταση $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^{\ 2} \Rightarrow y_2 = 80m$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.
Επομένως, η απόσταση του σημείου από το σημείο εκτόξευσης θα είναι
$d = \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} \Rightarrow d = \sqrt{80^2 + (2\cdot 80)^2} \Rightarrow \boxed{d = 80\sqrt{5}m}$.
Η απόσταση του σώματος από το έδαφος τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι ίση με $h' = h - y_2 \Rightarrow h' = 125 - 80 \Rightarrow \boxed{h' = 45m}$.

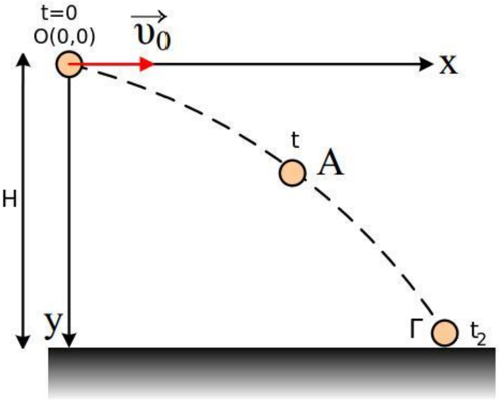
Η απόσταση του σώματος απ' το σημείο βολής ή αλλιώς το μέτρο της ολικής μετατόπισής του απ' το σημείο αυτό όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση (x, y) βρίσκεται απ' τη σχέση $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα.

Προσοχή: όταν μας ζητούν το ύψος που βρίσκεται το σώμα από το έδαφος θα πρέπει να αφαιρούμε από το αρχικό ύψος την κατακόρυφη μετατόπιση

ε) Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_4 η οριζόντια και η κατακόρυφη απόσταση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης έχουν ίσα μέτρα. Για αυτή τη στιγμή θα ισχύει: $y_4 = x_4 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_4^{\ 2} = u_o t_4 \Rightarrow t_4 = 8s$. Όμως το σώμα προσκρούει στο έδαφος σε χρόνο $t_k = 5s$. Επομένως, δεν είναι δυνατόν κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος η οριζόντια και η κατακόρυφη απόσταση του από το σημείο εκτόξευσης να γίνουν ίσες. Αν το ύψος απ' το οποίο βάλλεται το σώμα ήταν μεγαλύτερο, μπορεί να υπήρχε θέση που να συνέβαινε $y_4 = x_4$.

στ) Η γωνία που σχηματίζει τη στιγμή t_1 η ταχύτητα υ_1 του σώματος με την αρχική του ταχύτητα υ_0 καλείται γωνία εκτροπής του σώματος. Η γωνία αυτή είναι πάντα ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του σώματος με τον ορίζοντα τη στιγμή t_1. Οι γωνίες αυτές είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, άρα $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{1y}}{\upsilon_{1x}} = \frac{1}{2}$.

3. Το σώμα του διπλανού σχήματος 4 εκτοξεύεται τη στιγμή t_0=0 από ύψος H=80m πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 και φτάνει στο έδαφος έχοντας ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 50m/s$. Οι αντιστάσεις είναι αμελητέες. Δίνεται g=10m/s^2.



Σχήμα 2: Λυμένη Άσκηση 3

α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που το σώμα φτάνει στο έδαφος.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στον κατακόρυφο άξονα τη χρονική στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0 .

δ)Με τη βοήθεια της αρχής ανεξαρτησίας των κινήσεων να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος στον οριζόντιο άξονα Ox και στον κατακόρυφο άξονα Oy καθώς και τις χρονοεξισώσεις των αντίστοιχων ταχυτήτων. Ποια είναι η θέση του σώματος τη στιγμή t=3s;

ε) Να βρείτε το μέτρο της μετατόπισης του σώματος από το σημείο εκτόξευσης τη χρονική στιγμή t=3s.

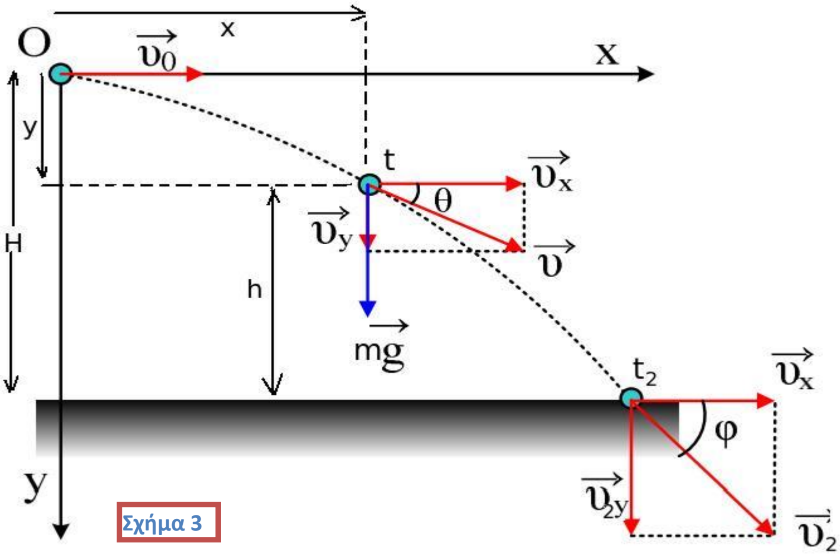
στ) Να βρεθεί η ισχύς του βάρους την παραπάνω χρονική στιγμή.

Δίνεται η μάζα του σώματος m=2kg.

ΛΥΣΗ

α) Στον κατακόρυφο άξονα η εξίσωση κίνησης είναι η $y = \frac{1}{2}gt^2$. Αν θέσουμε στον τύπο αυτό y = H θα βρούμε τη χρονική στιγμή t_2 που το σώμα φτάνει στο έδαφος. Είναι :

$$H = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \boxed{4s}$$



Σχήμα 3

β) Το μέτρο της ταχύτητας στον κατακόρυφο άξονα (υ_y) δίνεται από τη σχέση $\upsilon_y = gt$. Για τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος έχουμε

$$\upsilon_{2y} = gt_2 = \boxed{40\ m/s}$$

γ) Η ταχύτητα $\vec{v}_2$ έχει αναλυθεί στις συνιστώσες v_{2x} και v_{2y} που είναι κάθετες μεταξύ τους :

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} \Rightarrow v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2 \Rightarrow v_{2x}^2 = v_2^2 - v_{2y}^2 \Rightarrow v_{2x} = \sqrt{v_2^2 - v_{2y}^2} = 30 m/s$$

Στον άξονα Ox όμως το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση συνεπώς

$$\boxed{v_0 = v_{2x} = 30\, m/s}$$

δ) Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, όταν ένα κινητό εκτελεί ταυτόχρονα δυο ή περισσότερες κινήσεις καθεμία από αυτές εκτελείται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Στον άξονα Ox δε δέχεται καμία δύναμη οπότε εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Την t=0 έχουμε $x_0=0$ επομένως η εξίσωση κίνησης στον άξονα αυτό είναι

Όταν γράφουμε τις χρονοεξισώσεις των συντεταγμένων και των ταχυτήτων προσέχουμε να βάζουμε περιορισμό στο χρόνο μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει το σώμα στο έδαφος.

$x = v_0 t \Rightarrow \boxed{\mathbf{x = 30t}}$ **(S.I), 0≤t≤4s** και $v_x = v_0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_x = 30\frac{m}{s}}}$, **0≤t≤4s**

Στον κατακόρυφο άξονα Oy δέχεται το βάρος του μόνο οπότε εκτελεί ελεύθερη πτώση

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = 5t^2}}$ **(S.I), 0≤t≤4s** και $v_y = gt \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_y = 10t}}$ **(S.I.) , 0≤t≤4s**

Τη στιγμή $t = 3\, s$ το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά $y_1 = \frac{1}{2}gt^2 = 45\, m$ στον άξονα Oy ενώ στον άξονα Ox κατά $x_1 = v_0 t \Rightarrow x_1 = 90\, m$. Άρα την $t = 3\, s$ βρίσκεται στη θέση Ζ $(90m, 45m)$.

ε) Η μετατόπιση του σώματος κάθε στιγμή είναι το διανυσματικό

άθροισμα της συντεταγμένης x και της συντεταγμένης y.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{90^2 + 45^2} = 45\sqrt{5}\, m \approx 100{,}6m$$

στ) Η στιγμιαία ισχύ μιας δύναμης είναι ίση με το ρυθμό με το οποίο η δύναμη παράγει έργο εκείνη τη στιγμή.

$$P = \frac{\Delta W_w}{\Delta t} = \frac{mg\Delta s συνφ}{\Delta t} = mgv_y = \boxed{600\frac{J}{s}}$$

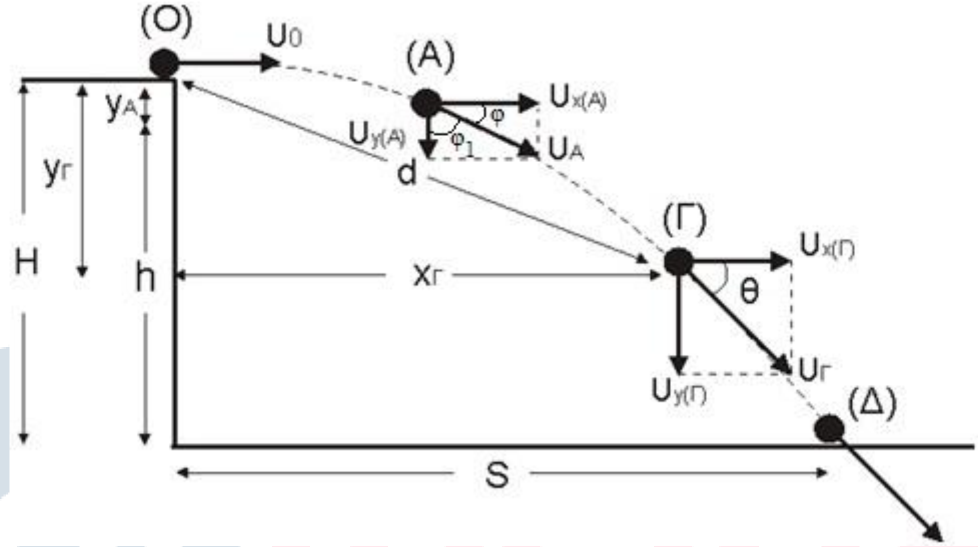
όπου $συνφ$ το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του βάρους $m\vec{g}$ και της στοιχειώδους μετατόπισης $\Delta\vec{s}$.

4. Σώμα μάζας m=2Kg εκτοξεύεται από σημείο (Ο), το οποίο βρίσκεται σε ύψος Η από το έδαφος, με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_0 = 40\frac{m}{s}$. Το σώμα προσκρούσει στο έδαφος σε χρόνο $t_{ολ}$=6s.
Αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, να βρείτε:
α) Το ύψος Η από το οποίο εκτοξεύτηκε το σώμα και σε πόση οριζόντια απόσταση θα πέσει το σώμα στο έδαφος (βεληνεκές).
β) Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος σχηματίζει γωνία 45^0 με τον ορίζοντα και τη μετατόπιση του σώματος από το σημείο (Ο) μέχρι εκείνη τη στιγμή.

γ) Την ταχύτητα του σώματος όταν διέρχεται από ένα σημείο (Α) το οποίο απέχει απόσταση h=135m από το έδαφος.
δ) Τη μεταβολή της ταχύτητας του σώματος μεταξύ των θέσεων (Ο) και (Α) καθώς και το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας στο σημείο (Α).
ε) Την κινητική ενέργεια του σώματος όταν η βαρυτική του δυναμική ενέργεια έχει μειωθεί 50% σε σχέση με την αρχική τιμή της στη θέση (Ο).
στ) Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος στη θέση (Α).

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:



α) $H = \frac{1}{2} g t_{ολ}^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6^2 \Rightarrow \boxed{H = 180m}$. $S = \upsilon_0 \cdot t_{ολ} \Rightarrow S = 40 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{S = 240m}$.

β) Έστω ότι το σώμα διέρχεται από τη θέση (Γ), όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, τη χρονική στιγμή $t_Γ$. Αν στη θέση (Γ) η γωνία θ ισούται με 45^0, τότε $εφ45^0 = \frac{\upsilon_{yΓ}}{\upsilon_{xΓ}} \Rightarrow 1 = \frac{\upsilon_{yΓ}}{\upsilon_0} \Rightarrow \upsilon_{yΓ} = 40\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_{yΓ} = 40\frac{m}{s} \Rightarrow g t_Γ = 40 \Rightarrow \boxed{t_Γ = 4\,s}$. Τη χρονική στιγμή $t_Γ$ η οριζόντια απόσταση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης θα είναι ίση με $x_Γ = \upsilon_0 \cdot t_Γ \Rightarrow x_Γ = 160m$, ενώ η κατακόρυφη απόσταση $y_Γ = \frac{1}{2} g t_Γ^2 \Rightarrow y_Γ = 80m$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Επομένως, η μετατόπιση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης θα είναι $d = \sqrt{x_Γ^2 + y_Γ^2} \Rightarrow d = \sqrt{(2 \cdot 80)^2 + 80^2} \Rightarrow \boxed{d = 80\sqrt{5}m}$.

Η διεύθυνση της μετατόπισης έχει κλίση με τον οριζόντιο άξονα $εφθ = \frac{y}{x} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$.

γ) Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση (Α) θα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση $y_A = H - h \Rightarrow y_A = 45m$. Άρα, $y_A = \frac{1}{2} g t_A^2 \Rightarrow 45 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_A^2 \Rightarrow t_A = 3s$, όπου t_A η χρονική στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση (Α). Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος στη θέση (Α) θα είναι $\upsilon_{y(A)} = g \cdot t_A \Rightarrow \upsilon_{y(A)} = 10 \cdot 3 \Rightarrow \upsilon_{y(A)} = 30\frac{m}{s}$. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση (Α) θα ισούται με

$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{x(A)}{}^2 + \upsilon_{y(A)}{}^2} \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{40^2 + 30^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = 50\frac{m}{s}}$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας του σώματος θα είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{y(A)}}{\upsilon_{x(A)}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}}$.

δ) Η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση αφού $\upsilon_x = \upsilon_0 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$.

Επομένως, $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{y(A)} - \vec{\upsilon}_{y(O)} \Rightarrow \Delta\upsilon = 30 - 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\upsilon = 30\frac{m}{s}}$.

Το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$ έχει τη διεύθυνση του άξονα Oy και φορά προς τα κάτω.

Επίσης, $\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \vec{\alpha} \Rightarrow \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = g \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 10\frac{m}{s^2}}$.

Στην οριζόντια βολή πάντα ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνιστώσας της στον κατακόρυφο άξονα, δηλαδή της υ_y (γιατί μόνο το μέτρο αυτής αυξάνεται) και είναι ίσος με $\vec{g}$, δηλαδή βρίσκεται πάνω στον άξονα Oy και έχει φορά προς τα κάτω.

ε) Έστω ότι σε μια θέση (Ε) η βαρυτική του δυναμική ενέργεια του σώματος έχει μειωθεί κατά 50% σε σχέση με την αρχική τιμή της στη θέση (Ο). Επειδή η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται σταθερή ισχύει

$$K_{(O)} + U_{(O)} = K_{(E)} + U_{(E)} \Rightarrow K_{(O)} + U_{(O)} = K_{(E)} + \frac{U_{(O)}}{2} \Rightarrow$$

$$K_{(E)} = K_{(O)} + \frac{U_{(O)}}{2} \Rightarrow K_{(E)} = \frac{1}{2}m\upsilon_0{}^2 + \frac{mgH}{2} \Rightarrow K_{(E)} = 1600 + 1800 \Rightarrow \boxed{K_{(E)} = 3400J}.$$

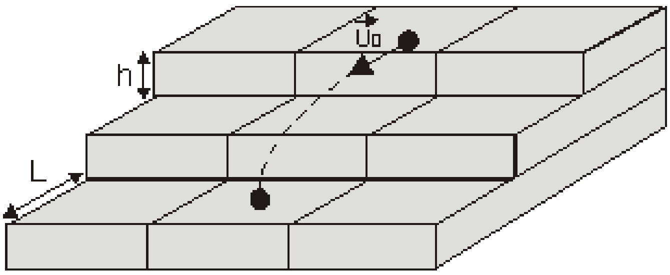
στ) Στο στοιχειώδες (απειροελάχιστο) χρονικό διάστημα dt το σώμα εκτελεί μετατόπιση $d\vec{x}$ και η κινητική ενέργεια του σώματος μεταβάλλεται κατά dK, ενώ η $\Sigma\vec{F}$ παράγει στοιχειώδες έργο $dW_{\Sigma F}$. Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχω ότι $dK = dW_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1$ όπου φ_1 η γωνία που σχηματίζει η $\Sigma\vec{F}$ με την $\vec{\upsilon}$. Όμως $\frac{dx}{dt} = \upsilon$, άρα $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1$ (1). Εδώ $\Sigma F = w$ και σχηματίζει με την ταχύτητα υ_A στη θέση Α γωνία $\varphi_1 = 90^0 - \varphi$. Άρα η (1)$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = w \cdot \upsilon_A \cdot \sigma\upsilon\nu(90^0 - \varphi)$ (2). Από σχήμα $\sigma\upsilon\nu(90^0 - \varphi) = \frac{\upsilon_{yA}}{\upsilon_A} \Rightarrow \upsilon_{yA} = \upsilon_A\, \sigma\upsilon\nu(90^0 - \varphi)$. Άρα η (2)$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = w \cdot \upsilon_{yA} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = mg \cdot \upsilon_{yA} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 2 \cdot 10 \cdot 30 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{dK}{dt} = 600\frac{J}{s}}$. $\frac{dK}{dt} > 0$ γιατί η Κ αυξάνεται αφού το σώμα επιταχύνεται στον άξονα Oy.

Σε κάθε κίνηση ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας γράφεται $\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1}{dt}$ άρα $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1$ όπου υ η στιγμιαία ταχύτητα και φ_1 η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της $\Sigma\vec{F}$ με το διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας. Στην οριζόντια βολή $\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \upsilon_y$ και $\Sigma F = w$, άρα $\frac{dK}{dt} = w \cdot \upsilon_y$.

Στην οριζόντια βολή η μηχανική ενέργεια του σώματος μένει σταθερή αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος που είναι συντηρητική. $E_{MHX} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \Rightarrow K + U = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$ γιατί ο ρυθμός μεταβολής ενός σταθερού μεγέθους είναι μηδέν. Άρα $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dt} = -600\frac{J}{s}}$. $\frac{dU}{dt} < 0$ γιατί η U μειώνεται αφού το σώμα κατέρχεται.

Στην οριζόντια βολή $\frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt} = -w \cdot \upsilon_y$ λόγω Α.Δ.Μ.Ε.

5. Τα σκαλοπάτια μιας σκάλας έχουν ύψος h=20cm και μήκος L=40cm. Μια μπάλα εκτοξεύεται οριζόντια από την άκρη ενός σκαλοπατιού και αφού περάσει ξυστά από το αμέσως παρακάτω προσκρούει στο επόμενο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εάν g=10m/sec^2, να υπολογίσετε:

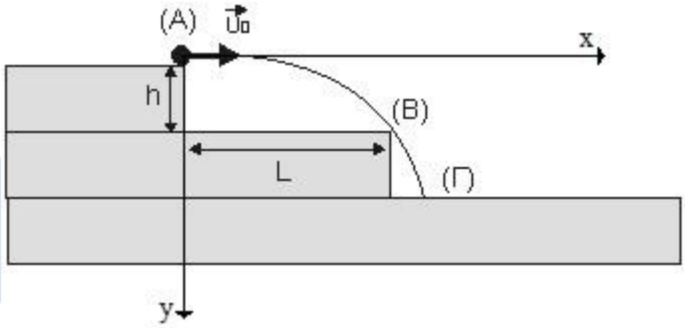
α) Την οριζόντια ταχύτητα βολής, $\vec{\upsilon}_0$, της μπάλας.

β) Το σημείο σύγκρουσης της με το σκαλοπάτι.

γ) Την ταχύτητα σύγκρουσης.

Λύση:

α) Η μπάλα για να φτάσει στο σημείο (Β), που είναι η άκρη του δεύτερου σκαλοπατιού, θα έχει κατέβει υψομετρικά από το σημείο εκτόξευσης, που είναι η άκρη του πρώτου σκαλοπατιού (σημείο Α), απόσταση $y = h$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Επομένως, $y = h \Rightarrow \frac{1}{2} g t_1^{\,2} = 0{,}2 \Rightarrow t_1 = 0{,}2s$, όπου t_1 ο χρόνος που χρειάζεται προκειμένου η μπάλα, από το σημείο εκτόξευσης (σημείο Α), να φτάσει στην άκρη του δεύτερου σκαλοπατιού (σημείο Β). Ταυτόχρονα, αφού η μπάλα περνά ξυστά από το δεύτερο σκαλοπάτι (σημείο Β), θα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $L = \upsilon_0 \cdot t_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 2\frac{m}{s}}$.

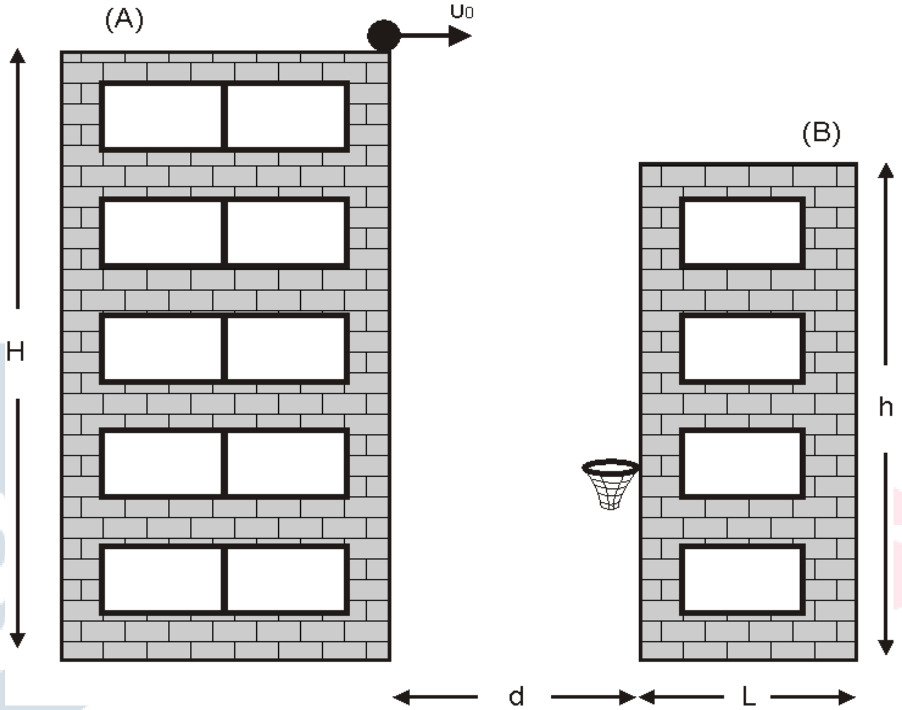
β) Η μπάλα μέχρι το σημείο πρόσκρουσης (σημείο Γ) θα έχει κατέβει υψομετρικά απόσταση $y = 2h$. Δηλαδή, $y = 0{,}4 \Rightarrow \frac{1}{2} g t_2^{\,2} = 0{,}4 \Rightarrow t_2 = 0{,}2\sqrt{2}s$, όπου t_2 ο χρόνος που χρειάζεται προκειμένου η μπάλα, από το σημείο εκτόξευσης (σημείο Α), να φτάσει στο σημείο πρόσκρουσης με το τρίτο σκαλοπάτι (σημείο Γ). Επομένως, το σημείο πρόσκρουσης (σημείο Γ) θα απέχει κατακόρυφη απόσταση από το σημείο εκτόξευσης (σημείο Α) $y = 2h \Rightarrow \boxed{y = 40cm}$ και οριζόντια απόσταση $x = \upsilon_0 \cdot t_2 \Rightarrow \boxed{x = 40\sqrt{2}cm}$. Άρα το σημείο πρόσκρουσης έχει συντεταγμένες $x_\Gamma = 40\sqrt{2}\ cm$ και $y_\Gamma = 40\ cm$ θεωρώντας αρχή μέτρησης των αξόνων το σημείο βολής Α.

γ) Στο σημείο πρόσκρουσης (σημείο Γ), η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας θα είναι $\upsilon_y = g \cdot t_2 \Rightarrow \upsilon_y = 2\sqrt{2}\frac{m}{s}$,ενώ η οριζόντια συνιστώσα θα είναι $\upsilon_x = \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_x = 2\frac{m}{s}$. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης θα είναι ίσο με $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\,2} + \upsilon_y^{\,2}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.

Η κατεύθυνση της ταχύτητας της μπάλας στο σημείο πρόσκρουσης είναι $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \Rightarrow$

$\boxed{\varepsilon\phi\theta = \sqrt{2}}$.

6. Δυο ψηλά κτήρια (Α) και (Β) απέχουν απόσταση d=30m μεταξύ τους. Το κτήριο (Α) έχει ύψος H=100m, ενώ το κτήριο (Β) έχει ύψος h=80m και πλάτος L=20m. Από το ακραίο σημείο της ταράτσας του κτηρίου (Α) εκτοξεύεται μια μπάλα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$, με σκοπό να φτάσει στην ταράτσα του κτηρίου (Β), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Θα φτάσει η μπάλα στην ταράτσα του (Β) κτηρίου;

β) Για ποιες τιμές της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας υ_0 η μπάλα θα πέσει στην ταράτσα του (Β) κτηρίου;

γ) Έστω ότι εκτοξεύουμε οριζόντια τη μπάλα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 40\frac{m}{s}$ από την άκρη της ταράτσας του κτηρίου (Α). Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να είναι το ύψος ενός εμποδίου που θα τοποθετήσουμε στο μέσον της ταράτσας του κτηρίου (Β) ώστε η μπάλα μόλις που να περάσει πάνω από αυτό.

δ) Στην πλευρά του (Β) κτηρίου, στο ύψος του 5^{ου} ορόφου, ο οποίος βρίσκεται 20m πάνω από το έδαφος, έχει τοποθετηθεί ένα καλάθι του μπάσκετ. Να υπολογίσετε ποια πρέπει να είναι η οριζόντια ταχύτητα υ_0 που πρέπει να εκτοξεύσουμε τη μπάλα από την άκρη της ταράτσας του κτηρίου (Α) ώστε να πετύχουμε το καλάθι.

Θεωρήστε ότι η μπάλα όσο και το καλάθι έχουν αμελητέες διαστάσεις και ότι δεν υπάρχει αντίσταση στην κίνηση της μπάλας από τον αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:

α) Για να φτάσει η μπάλα στην αριστερή πλευρά της ταράτσας του (Β) κτηρίου θα χρειαστεί χρόνος t ο οποίος υπολογίζεται από τη σχέση $d = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{\upsilon_0} \Rightarrow t = 3s$. Στον ίδιο χρόνο η μπάλα θα έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \Rightarrow y = 45m$. Αυτό σημαίνει ότι η μπάλα δεν θα φτάσει στην ταράτσα του (Β) κτηρίου αλλά θα χτυπήσει στην πλευρά του κτηρίου σε ύψος $h_1 = H - y = 55\ m$ από το έδαφος.

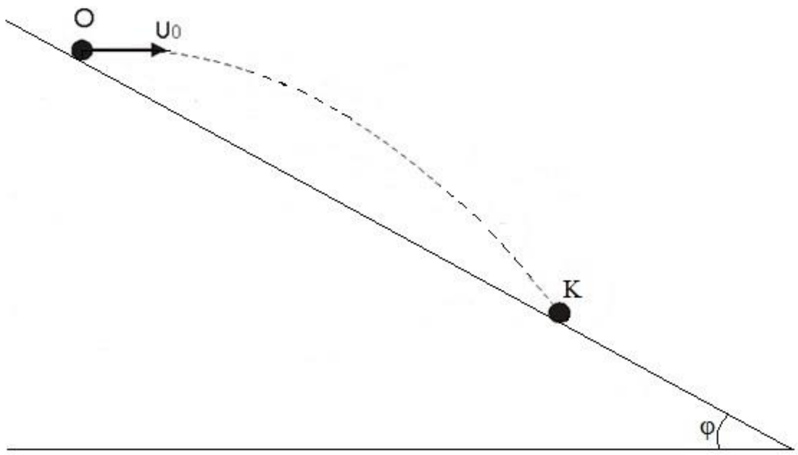
β) Για να φτάσει η μπάλα στο (Β) κτήριο θα πρέπει να μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $y_1 = H - h \Rightarrow y_1 = 20m$. Δηλαδή, ο χρόνος κίνησης της μπάλας από την ταράτσα του (Α) κτηρίου μέχρι την ταράτσα του (Β) κτηρίου θα είναι $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 20 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2s$.

Όμως η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η μπάλα για προκειμένου να πέσει στην ταράτσα του (Β) κτηρίου πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την απόσταση d των δυο κτηρίων και μικρότερη από την απόσταση d+L. Δηλαδή, $d \leq x_1 \leq d + L \Rightarrow 30 \leq \upsilon_0 \cdot t_1 \leq 50 \Rightarrow$ $30 \leq \upsilon_0 \cdot 2 \leq 50 \Rightarrow \boxed{15\frac{m}{s} \leq \upsilon_0 \leq 25\frac{m}{s}}$.

γ) Αν το εμπόδιο το τοποθετήσουμε στο μέσον της ταράτσας του κτηρίου (Β), η μπάλα μέχρι εκεί θα διανύσει οριζόντια απόσταση $x_2 = d + \frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon_0 \cdot t_2 = d + \frac{L}{2} \Rightarrow 40 \cdot t_2 = 40 \Rightarrow t_2 = 1s$. Σε αυτό το χρόνο το σώμα θα έχει κατέβει κατά $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = y_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1^2 \Rightarrow y_2 = 5m$. Όμως, η υψομετρική διαφορά των δυο κτηρίων είναι 20m. Επομένως, για να περάσει η μπάλα ξυστά πάνω από το εμπόδιο θα πρέπει αυτό να έχει ύψος $h' = 20 - 5 \Rightarrow \boxed{h' = 15m}$.

δ) Η μπάλα για να φτάσει μπει στο καλάθι θα πρέπει από το σημείο της εκτόξευσης μέχρι να φτάσει στο στόχο να κατέβει κατά $y_3 = H - 20 \Rightarrow y_3 = 80 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_3^2 = 80 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_3^2 = 80 \Rightarrow t_3 = 4s$.Όμως, σε αυτό το χρονικό διάστημα η μπάλα θα πρέπει να διανύσει οριζόντια απόσταση $x_3 = d \Rightarrow \upsilon_0 \cdot t_3 = 30 \Rightarrow \upsilon_0 \cdot 4 = 30 \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 7{,}5\frac{m}{s}}$.

7. Το κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους του παρακάτω σχήματος έχει γωνία κλίσης $\varphi = 30^0$. Από ένα σημείο Ο του κεκλιμένου επιπέδου βάλλουμε την $t_0 = 0$ μικρή πέτρα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0. Η πέτρα προσκρούει στο κεκλιμένο επίπεδο στη θέση Κ που απέχει απ' το σημείο βολής Ο απόσταση ΟΚ$= 10\ m$.



α) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Κ.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0 της πέτρας.

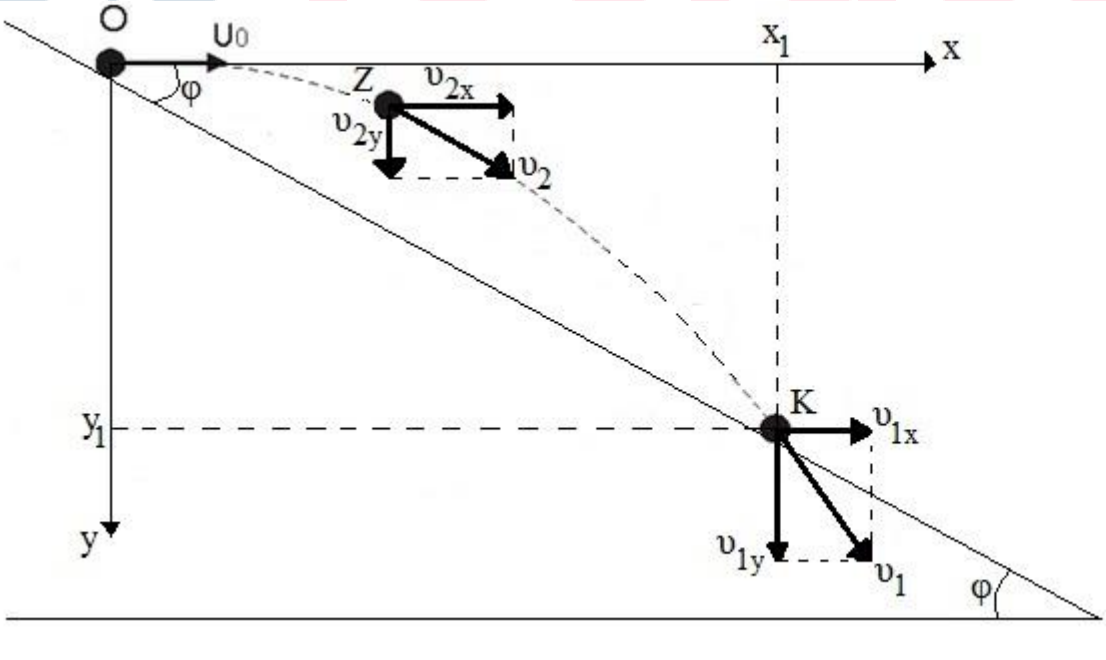
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας υ_1 την οποία έχει η πέτρα στη θέση Κ.

δ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που η πέτρα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της απ' το κεκλιμένο επίπεδο.

ε) Αν η μάζα της πέτρας είναι $m = 0{,}1\ kg$ να υπολογίσετε τη μεταβολή της κινητικής της ενέργειας απ' τη στιγμή $t_0 = 0$ ως τη στιγμή που φτάνει στο Κ.

Θεωρήστε τις αντιστάσεις του αέρα αμελητέες και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:



α) Η γωνία φ του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με την $K\hat{O}X$ ως εντός εναλλάξ. Στο τρίγωνο ΚΟΧ$_1$ ισχύει: $\eta\mu\varphi = \frac{y_1}{OK} \Rightarrow \eta\mu 30^0 = \frac{y_1}{10} \Rightarrow \boxed{y_1 = 5\ m}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x_1}{OK} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{x_1}{OK} \Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 5\sqrt{3}\ m}$, άρα η θέση Κ έχει συντεταγμένες $\boxed{K(5\sqrt{3}\ m, 5\ m)}$.

β) Όταν η πέτρα φτάνει στο Κ (τη στιγμή t_1) έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά $y_1 = 5\,m$, άρα $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2}10t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1\,s$, ενώ οριζόντια κατά $x_1 = 5\sqrt{3}\,m$ άρα $x_1 = \upsilon_0 t_1 \Rightarrow 5\sqrt{3} = \upsilon_0 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 5\sqrt{3}\frac{m}{s}}$.

γ) Στη θέση Κ η πέτρα έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{1x} = \upsilon_0 = 5\sqrt{3}\frac{m}{s}$ και κατακόρυφη μέτρου $\upsilon_{1y} = gt_1 \Rightarrow \upsilon_{1y} = 10\frac{m}{s}$. Άρα το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας στη θέση Κ είναι $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 10^2} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{175}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 5\sqrt{7}\frac{m}{s}}$.

δ) Στη θέση Ζ η πέτρα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος απ' το κεκλιμένο επίπεδο. Άρα στη θέση αυτή δεν έχει ταχύτητα κάθετη στο κεκλιμένο αφού παύει να ανεβαίνει πλέον πιο ψηλά πάνω απ' αυτό. Συνεπώς στη θέση Ζ η στιγμιαία ταχύτητα της σφαίρας είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_2$ και $\vec{\upsilon}_{2x}$ στη θέση Ζ ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες. Άρα ισχύει $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\upsilon_{2y}}{\upsilon_{2x}} \Rightarrow \varepsilon\varphi 30^0 = \frac{\upsilon_{2y}}{\upsilon_0} \Rightarrow \upsilon_{2y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 5\sqrt{3} = 5\frac{m}{s}$. $\upsilon_{2y} = gt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{5}{10} \Rightarrow \boxed{t_2 = 0{,}5\,s}$.

ε) Αφού κατά την οριζόντια βολή η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος του σώματος ισχύει η Α.Δ.Μ.Ε. για κάθε θέση της τροχιάς του. Άρα $K + U = E_{MHX} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$.

Την $t = 0$: $U_0 = mgy_1$.

Την $t = t_1$: $U_1 = 0$. Άρα $\Delta U = 0 - mgy_1 \Rightarrow \Delta U = -mgy_1 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta K = mgy_1 \Rightarrow \boxed{\Delta K = 5\,J}$.

Στην οριζόντια βολή είναι ευκολότερο να βρίσκω τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος απ' τη σχέση $\Delta K = -\Delta U$, αφού το ΔU είναι πάντα $\Delta U = -mg\Delta y$.

Άλυτες Ασκήσεις - Ασκήσεις που αναφέρονται στην κίνηση ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή

8. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα 10m/s και από ύψος 80m. Αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, να βρείτε:
α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος.
β) Σε πόση οριζόντια απόσταση θα πέσει το σώμα στο έδαφος.
γ) Με τι ταχύτητα θα έπρεπε να ρίξουμε την πέτρα, ώστε να πέσει σε οριζόντια απόσταση 80m.
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α. 4s, β. 40m, γ. 20m/s)

9. Σώμα βάλλεται από ύψος h=20m με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_o= 20m/s. Να υπολογιστούν:
α) Η χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος
β) Το βεληνεκές
γ) Η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας όταν φτάνει στο έδαφος
δ) Το μέτρο της ταχύτητας όταν φτάνει στο έδαφος
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α. 2s, β. 40m, γ. 20m/s, 20m/s, δ. $20\sqrt{2}$ m/s)

10. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα 60m/s και από ύψος 320m. Αν η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα, να βρείτε:

α) Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος.

β) Σε πόση οριζόντια απόσταση θα πέσει το σώμα στο έδαφος (βεληνεκές).

γ) Την ταχύτητα του όταν χτυπά στο έδαφος.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. 8s, β. 480m, γ. $\upsilon = 100 m/s$ και $\varepsilon\phi\theta = \frac{4}{3}$)

11. Σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος h=180m από το έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ_o=20m/s. Να βρείτε:

α) σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος

β) ποιά είναι η μέγιστη οριζόντια μετατόπισή του

γ) την ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. 6s, β. 120m, γ. $20\sqrt{10} m/s$ και εφθ=3)

12. Σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος 180m με ταχύτητα 30m/s. Να βρείτε:

α) Το χρόνο κίνησης του σώματος.

β) Τη μέγιστη οριζόντια μετατόπιση του (βεληνεκές).

γ) Την ταχύτητα του όταν ακουμπάει στο έδαφος.

δ) Τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$ μετά την εκτόξευσή του.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. 6s, β. 180m, γ. $30\sqrt{5} m/s$ και εφθ=2, δ. $\theta = 45^0$)

13. Μικρό σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος $H = 125\ m$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 20\frac{m}{s}$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα φτάνει στο έδαφος.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισης του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος.

γ) Να γράψετε τις χρονοεξισώσεις των συντεταγμένων x, y του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος.

δ) Να γράψετε τη χρονοεξίσωση της κατακόρυφης ταχύτητας υ_y του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος.

ε) Να γράψετε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος. Τι μορφή έχει η τροχιά αυτή;

(α. $t_1 = 5\ s$, β. $x_{max} = 100\ m$, γ. $x = 20t$ (S.I.) για $0 \le t \le 5\ s$, $y = 5t^2$ (S.I.) για $0 \le t \le 5s$, δ. $\upsilon_y = 10t$ (S.I.) για $0 \le t \le 5\ s$, ε. $y = 0{,}0125x^2$ (S.I.) για $0 \le x \le 100\ m$, παραβολή)

14. Μπάλα του μπάσκετ βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$ από ύψος $H = 180\ m$ απ' το οριζόντιο έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

α) Ποια χρονική στιγμή η μπάλα βρίσκεται σε ύψος $h_1 = 160\ m$ απ' το έδαφος.

β) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας τη χρονική στιγμή t_1;
γ) Να γράψετε τις χρονοεξισώσεις των συντεταγμένων x και y της μπάλας μέχρι αυτή να φτάσει στο έδαφος.
δ) Να γράψετε την εξίσωση της τροχιάς της μπάλας. Τι σχήμα έχει η τροχιά αυτή;
(α $t_1 = 2\ s$, β. $|\upsilon_1| = 10\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$, γ. $x = 10t$ (S.I.) για $0 \le t \le 6\ s$, $y = 5t^2$ (S.I.) για $0 \le t \le 6\ s$, δ. $y = 0{,}05x^2$ (S.I.) για $0 \le x \le 60\ m$, παραβολική)

15. Σώμα μικρών διαστάσεων ρίχνεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 από ύψος H πάνω απ' το οριζόντιο έδαφος από σημείο Ο (0,0) τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η εξίσωση της τροχιάς του σώματος είναι $y = 0{,}2x^2$ (S.I.) για $0 \le x \le 35\ m$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα αμελούνται.
α) Να βρείτε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας.
β) Να υπολογίσετε το ύψος H από το έδαφος που έγινε η βολή του σώματος.
γ) Να γράψετε τη χρονοεξίσωση της κατακόρυφης ταχύτητας του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος και να την παραστήσετε γραφικά.
(α. $\upsilon_0 = 5\,\frac{m}{s}$, β. $H = 245\ m$, γ. $\upsilon_y = 10t$ (S.I.) για $0 \le t \le 7\ s$)

16. Μικρή πέτρα βάλλεται από ύψος $H = 125\ m$ πάνω απ' το οριζόντιο έδαφος απ' το σημείο Ο (0,0) με ταχύτητα μέτρου υ_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η εξίσωση της τροχιάς του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος είναι $y = 0{,}05x^2$ (S.I.) για $0 \le x \le x_{max}$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα αμελούνται.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του σώματος.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης οριζόντιας μετατόπισης x_{max} του σώματος.
γ) Να γράψετε τη χρονοεξίσωση της κατακόρυφης ταχύτητας του σώματος μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος.
(α. $\upsilon_0 = 10\,\frac{m}{s}$, β. $x_{max} = 50\ m$, γ. $\upsilon_y = 10t$ (S.I.) για $0 \le t \le 5\ s$)

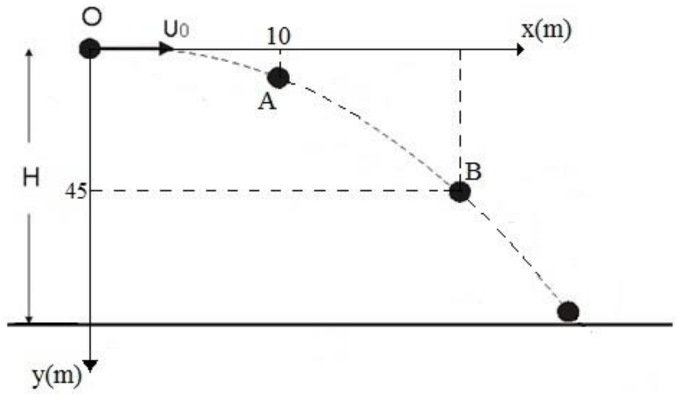
17. Σώμα μικρών διαστάσεων εκτοξεύεται την $t = 0$ από ύψος $h = 125\ m$ από το οριζόντιο έδαφος με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0. Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\frac{m}{s^2}$. Τη στιγμή t_1 που η που η κατακόρυφη στιγμιαία ταχύτητα είναι $\upsilon_{1y} = 10\,\frac{m}{s}$ το σώμα έχει οριζόντια μετατόπιση ίση με $20\ m$.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα του σώματος με τον ορίζοντα τη στιγμή t_1.
γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος.
(α. $\upsilon_0 = 20\,\frac{m}{s}$, β. $\varepsilon\varphi\theta = 0{,}5$, γ. $|\upsilon_\tau| = 10\sqrt{29}\,\frac{m}{s}$, $\varepsilon\varphi\theta' = 2{,}5$)

18. Μικρή πέτρα εκτοξεύεται την $t = 0$ με οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_0 = 6\,\frac{m}{s}$ από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h από το οριζόντιο έδαφος. Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\,\frac{m}{s^2}$. Το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισής του μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι $x_{max} = 12\ m$.
α) Να υπολογίσετε το ύψος του σημείου Ο απ' το οριζόντιο έδαφος.
β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που το πηλίκο της αρχικής κινητικής ενέργειας της πέτρας προς τη δυναμική της ενέργεια είναι $\frac{K_0}{U} = \frac{1}{11}$. Να θεωρήσετε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας αυτό του οριζοντίου εδάφους.
γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της πέτρας 0,4 s πριν αυτή φτάσει στο έδαφος.

δ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_3 που το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισης της πέτρας απ' το σημείο βολής Ο είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισής της.

(α. $h = 20\ m$, β. $t_1 = 0{,}2\ s$, γ. $|\upsilon_2| = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}\frac{m}{s}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{8}{3}$, δ. $t_3 = 1{,}2\ s$)

19.



Σώμα μικρών διαστάσεων μάζας $m = 0{,}1\ kg$ την $t = 0$ βάλλεται με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $H = 80\ m$ απ' το οριζόντιο έδαφος. Τη χρονική στιγμή t_A περνά απ' τη θέση Α όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και τη στιγμή t_B περνά απ' τη θέση Β. Η χρονική διάρκεια που μεσολαβεί για να μεταβεί απ' τη θέση Α στη θέση Β είναι $2\ s$. Κατά την κίνηση οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$.

α) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές t_B, t_A.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0 του σώματος.

γ) Να βρείτε τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας απ' τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

δ) Να υπολογίσετε το βεληνεκές του σώματος.

(α. $t_A = 1\ s$, $t_B = 3\ s$, β. $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$, γ. $\Delta K = 80\ J$, δ. $x_{max} = 40\ m$)

20. Ένα σώμα βάλλεται από ύψος h από το έδαφος τη χρονική στιγμή t=0 με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o=30m/s και φτάνει στο έδαφος τη χρονική στιγμή t_1 έχοντας διανύσει οριζόντια απόσταση 90m. Να βρείτε

α) τη χρονική στιγμή t_1

β) το ύψος h

γ) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος λίγο πριν χτυπήσει στο έδαφος

δ) την απόσταση του σημείου βολής απ' το σημείο στο οποίο φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(α. $3\ s$, β. $45\ m$, γ. $30\sqrt{2}\frac{m}{s}$, δ. $45\sqrt{5}\ m$)

21. Από σημείο Ο, που βρίσκεται σε ύψος H=120m από το έδαφος, ρίχνεται οριζόντια σώμα με αρχική ταχύτητα υ_o=20m/s. Η εκτόξευση γίνεται τη χρονική στιγμή t=0, ενώ τη χρονική στιγμή t το σώμα περνάει από το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος h=40m από το έδαφος. Να βρείτε:

α) τη χρονική στιγμή t.

β) την οριζόντια απόσταση του σημείου Α από το σημείο βολής Ο.

γ) Την απόσταση του σώματος από το έδαφος τη στιγμή που η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία 45° με τον ορίζοντα.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. 4s, β. 80m, γ. 100m)

22. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $H = 80\,m$ απ' το οριζόντιο έδαφος, βάλλεται μικρή πέτρα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 20\frac{m}{s}$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\frac{m}{s^2}$ ενώ οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες. Κάποια στιγμή t_1 η πέτρα περνά απ' τη θέση Κ που στη θέση αυτή η ταχύτητά της σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία $\theta = 30^0$.

α) Να υπολογίσετε τη στιγμή t_1.

β) Να υπολογίσετε το ύψος που βρίσκεται η πέτρα απ' το οριζόντιο έδαφος τη χρονική στιγμή t_1.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση ΟΚ.

δ) Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση που διανύει η πέτρα μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

(α. $t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,s$, β. $h_1 = \frac{220}{3}\,m$, γ. $d_1 = \frac{20}{3}\sqrt{13}\,m$, δ. $x_{max} = 80\,m$)

23. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $H = 180\,m$ απ' το οριζόντιο έδαφος, βάλλεται σημειακό σώμα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 40\sqrt{2}\frac{m}{s}$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$.

α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που το διάνυσμα της ταχύτητας του σώματος σχηματίζει γωνία $\theta = 45^0$ με το οριζόντιο έδαφος.

β) Να βρείτε το ύψος απ' το οριζόντιο έδαφος που βρίσκεται το σώμα τη στιγμή t_1.

γ) Με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1.

δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΚ όπου Κ η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1.

ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό φτάνει στο οριζόντιο έδαφος.

(α. $t_1 = 4\sqrt{2}\,s$, β. $h_1 = 20\,m$, γ. $|\upsilon_1| = 80\frac{m}{s}$, δ. $d_1 = 160\sqrt{5}\,m$, ε. $\upsilon = 20\sqrt{17}\frac{m}{s}$, $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{4}$)

24. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος $H = 80\,m$ απ' το οριζόντιο έδαφος εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\sqrt{3}\frac{m}{s}$ μικρή σφαίρα τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$ και οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα της σφαίρας σχηματίζει γωνία $\theta = 60^0$ με τον ορίζοντα.

β) Να υπολογίσετε το ύψος πάνω απ' το έδαφος που βρίσκεται η σφαίρα τη χρονική στιγμή t_1.

γ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_2 που το σώμα φτάνει στο έδαφος.

ε) Να γράψετε τις χρονοεξισώσεις των συντεταγμένων x και y της σφαίρας μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος.

(α. $t_1 = 3\,s$, β. $h_1 = 35\,m$, γ. $t_2 = 4\,s$, δ. $x = 10\sqrt{3}\,t$ (S.I.) για $0 \leq t \leq 4s$, $y = 5t^2$ (S.I.) για $0 \leq t \leq 4s$)

25. Μικρό σώμα βάλλεται την $t = 0$ οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_o=20m/s από ύψος h από το έδαφος. Αν το βεληνεκές της βολής είναι 100m να βρεθούν:

α) το ύψος h

β) οι συντεταγμένες της θέσης στην οποία βρίσκεται το σώμα τη στιγμή t=2s

γ) τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2\,s$.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ. α. $125\,m$, β. $(40m, 20m)$, γ. $\theta = 45^0$)

26. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος 125m. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$

α) Πόσο χρόνο χρειάστηκε για να φτάσει στο έδαφος;
β) Αν η οριζόντια απόσταση που διάνυσε μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι 50 m με ποια οριζόντια ταχύτητα το εκτοξεύσαμε;
γ) Πόσο οριζόντιο διάστημα διήνυσε κατά το 1^{o} δευτερόλεπτο της κίνησης;
δ) Πόσο κατακόρυφο διάστημα διήνυσε κατά το 4^{o} δευτερόλεπτο της κίνησης;
(απ. α. 5s β. 10m/s γ. 10m δ. 35m)

27. Ένας αστροναύτης προκειμένου να προσδιορίσει την επιτάχυνση της βαρύτητας στον πλανήτη στον οποίο προσεδαφίστηκε εκτοξεύει οριζόντια από ύψος 12m μια μικρή πέτρα. Με ένα χρονόμετρο μετρά τον χρόνο που χρειάζεται η πέτρα για να φτάσει στο έδαφος. Αν ο χρόνος αυτός είναι 2s να βρείτε:
α) την επιτάχυνση της βαρύτητας στον πλανήτη αυτό
β) την αρχική ταχύτητα της πέτρας αν η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση της είναι 18m
γ) την ταχύτητα με την οποία η πέτρα φτάνει στο έδαφος
(απ. α. 6 m/s^2 β. 9 m/s γ. 15 m/s, εφθ=4/3)

28. Μπάλα μάζας m=200g βάλλεται από ύψος h με οριζόντια αρχική ταχύτητα $υ_o=10\sqrt{3}$m/s. και προσγειώνεται στο οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ=20m/s. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$. Να βρεθούν:
α) Ο χρόνος πτήσης
β) Το βεληνεκές
γ) Το ύψος h
δ) Το ρυθμό μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη στιγμή που η μπάλα προσκρούει στο έδαφος.
(απ: α. 1s, β. $10\sqrt{3}$m, γ. h=5m, δ. $-20\frac{J}{s}$)

29. Πέτρα μάζας m=2Kg βάλλεται από ύψος h με οριζόντια αρχική ταχύτητα $υ_o$=10m/s. Να υπολογιστούν τη χρονική στιγμή t=1s:
α) Οι συντεταγμένες (x,y).
β) Το μέτρο της ταχύτητας.
γ) Η κατεύθυνση της ταχύτητας ως προς τον ορίζοντα.
δ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. x=10m, y=5m, β. $10\sqrt{2}$m/s, γ. $θ=45^0$, δ. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -200\frac{J}{s}$ και $\frac{\Delta K}{\Delta t} = 200\frac{J}{s}$)

30. Μικρή πέτρα εκτοξεύεται οριζόντια από ύψος $H = 250\,m$ απ' το οριζόντιο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 20\frac{m}{s}$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\,s$ η πέτρα περνά απ' τη θέση Κ. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$.
α) Να βρείτε το ύψος απ' το οριζόντιο έδαφος που βρίσκεται η πέτρα τη χρονική στιγμή t_1.
β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Κ απ' το σημείο βολής της πέτρας.
γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου που φτάνει η πέτρα στο οριζόντιο έδαφος απ' το σημείο βολής της.
Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

(α. $h_1 = 230\ m$, β. $d_1 = 20\sqrt{5}\ m$, γ. $d = \sqrt{82.500}\ m = 50\sqrt{33}\ m$)

31. Μπαλάκι του τένις εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$ από ύψος $H = 80\ m$ απ' το οριζόντιο έδαφος. Η εκτόξευση γίνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$. Να υπολογίσετε:

α) Το ύψος h_1 απ' το έδαφος που βρίσκεται το μπαλάκι την χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$.

β) Αν τη χρονική στιγμή t_1 το μπαλάκι βρίσκεται στη θέση Ζ, να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου βολής απ' το σημείο Ζ.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Κ που συναντά το μπαλάκι το έδαφος απ' το σημείο βολής του.

Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.

(α. $h_1 = 35\ m$, β. $d_1 = \sqrt{2925}\ m = 15\sqrt{13}\ m$, γ. $d = 40\sqrt{5}\ m$)

32. Σώμα μάζας m=2Kg βάλλεται από ύψος h με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_o. Κάποια χρονική στιγμή t_1 το σώμα περνάει από το σημείο Α με συντεταγμένες x_A=100m και y_A=125m. Να βρεθούν:

α) Η χρονική στιγμή t_1.

β) Η αρχική ταχύτητα υ_o.

γ) Η ταχύτητα του σώματος όταν περνάει από το Α.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας του σώματος όταν περνάει από το Α.

Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. t_1=5s, β. 20m/s, γ. $\upsilon=10\sqrt{29}$m/s, εφθ=2,5, δ. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -1000\frac{J}{s}$ και $\frac{\Delta K}{\Delta t} = 1000\frac{J}{s}$)

33. Από σημείο Ο, που βρίσκεται σε ύψος Η=160m από το έδαφος, ρίχνεται οριζόντια σώμα με αρχική ταχύτητα σώμα μάζας m=100g με ταχύτητα μέτρου υ_o=15m/s. Η εκτόξευση γίνεται τη χρονική στιγμή t=0, ενώ τη χρονική στιγμή t το σώμα περνάει από το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος h=80m από το έδαφος. Να βρείτε:

α) Τη χρονική στιγμή t.

β) Την οριζόντια απόσταση του σημείου Α από το σημείο βολής Ο.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας του σώματος όταν περνάει από το Α.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α. 4s, β. 60m, γ. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -40\frac{J}{s}$ και $\frac{\Delta K}{\Delta t} = 40\frac{J}{s}$)

34. Σφαίρα του μπιλιάρδου εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$ από ύψος $H = 80\ m$ απ' το οριζόντιο έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\frac{m}{s^2}$.

α) Να διερευνήσετε αν η σφαίρα μπορεί να περάσει απ' τη θέση Κ που εκεί το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισής της x_K είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισής της y_K.

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 που η σφαίρα περνά απ' το σημείο Κ, καθώς και την απόσταση του σημείου Κ απ' το σημείο βολής.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1.

δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου βολής απ' το σημείο Ζ που η σφαίρα φτάνει στο έδαφος.

Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.
(α. ναι, β. $t_1 = 2\,s$, $d_K = 20\sqrt{2}\,m$, γ. $\upsilon_K = 10\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$, $εφθ = 2$, δ. $d_Z = \sqrt{8000}\,m = 40\sqrt{5}\,m$)

35. Μικρό αντικείμενο εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 20\,\frac{m}{s}$ από ύψος $H = 125\,m$ απ' το οριζόντιο έδαφος τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.
α) Να διερευνήσετε αν το αντικείμενο μπορεί να περάσει απ' τη θέση Κ που το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισής του x_K είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισής του y_K.
β) Να διερευνήσετε αν το αντικείμενο μπορεί να περάσει απ' τη θέση Ζ που το μέτρο της κατακόρυφης απομάκρυνσής του y_Z είναι τετραπλάσιο απ' το μέτρο της οριζόντιας απομάκρυνσή του x_Z.
γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1 που το αντικείμενο περνά απ' τη θέση Κ καθώς και την απόσταση του σημείου Κ απ' το σημείο βολής.
δ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου που το αντικείμενο φτάνει στο έδαφος απ' το σημείο βολής του.
Οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες.
(α. ναι, β. όχι, γ. $t_1 = 4\,s$, $d_K = 80\sqrt{2}\,m$, δ. $d = \sqrt{25625}\,m = 25\sqrt{41}\,m$)

36. Σώμα εκτοξεύεται οριζόντια την $t = 0$ με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o , από ορισμένο ύψος και μετά από λίγο βρίσκεται σε σημείο Α, έχοντας μετακινηθεί κατά 20m οριζόντια και 5m κατακόρυφα.
α) Να βρείτε την αρχική του ταχύτητα
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας στο Α
γ) Να υπολογίσετε στο σημείο Α τη γωνία μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης
δ) Από ποιο ύψος εκτοξεύτηκε το σώμα τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος αν η ταχύτητα του τη στιγμή αυτή σχηματίζει γωνία 45^0 με τον ορίζοντα
ε) Να υπολογίσετε τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη στιγμή $t' = 2\sqrt{3}\,s$.
Δίνεται ότι $g=10\ m/s^2$.
(απ. α. 20m/s β. $10\sqrt{5}\,m/s$ γ. εφφ=2 δ. 20m, ε. $\theta = 60^0$)

37. Σώμα μάζας m=5Kg βάλλεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα υ_0 από την αρχή Ο ορθογωνίου συστήματος αξόνων xOy. Μετά χρόνο t=1s η ταχύτητά του υ σχηματίζει γωνία 60^0 με την κατακόρυφο που διέρχεται από τη θέση, Α, του σώματος εκείνη τη στιγμή. Να υπολογιστούν:
α) Η αρχική ταχύτητα υ_o .
β) Οι συντεταγμένες x,y του σημείου Α.
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας του σώματος όταν περνάει από το Α.
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α.$10\sqrt{3}$m/s, β. (x,y)=($10\sqrt{3}$m, 5m), γ. $\frac{\Delta U}{\Delta t} = -500\frac{J}{s}$ και $\frac{\Delta K}{\Delta t} = 500\frac{J}{s}$)

38. Σε αγώνες άλματος με σκι, ένας σκιέρ εγκαταλείπει την πίστα με οριζόντια ταχύτητα υ_0 και αφού κάνει οριζόντια βολή, πέφτει στην πίστα σε ένα σημείο που βρίσκεται 45m χαμηλότερα και σε οριζόντια απόσταση 120m. Να υπολογιστεί η υ_0 αν $g=10m/s^2$.
(απ: 40m/s)

39. Με πόση αρχική ταχύτητα υ_o πρέπει να φύγει από την οριζόντια εξέδρα ένας σκιέρ ώστε να προσγειωθεί σε οριζόντια απόσταση 24m απ' το σημείο εκτόξευσης, αν το ύψος της εξέδρας είναι h=20m. Δίνεται $g=10m/s^2$.

(απ: $υ_o$=12m/s)

40. Βέλος βάλλεται από σημείο Ο που θεωρείται αρχή του ορθογωνίου συστήματος αξόνων xOy, με αρχική ταχύτητα $υ_o$=20m/s. Σε κάποιο σημείο Α της τροχιάς του η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας $υ_x$ γίνεται ίση με την κατακόρυφη συνιστώσα $υ_y$. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$. Να βρεθούν:
α) Η χρονική στιγμή που περνάει από το Α
β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α
γ) Η ταχύτητα υ στο σημείο Α
δ) Η γωνιακή εκτροπή του σώματος όταν περνά απ' το σημείο Α.
(απ: α. 2s, β. x=40m, y=20m, γ. $20\sqrt{2}$m/s, θ=45^0, δ. $\theta = 45^0$)

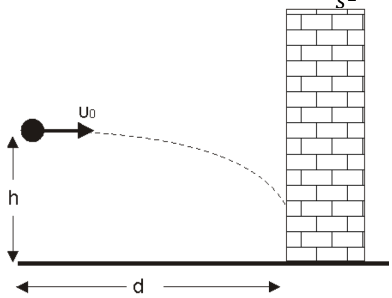
41. Σώμα ρίχνεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=100m/s. Να βρείτε σε ποια χρονική στιγμή:
α) Το μέτρο της οριζόντιας μετατόπισης του σώματος είναι ίσο με το μέτρο της κατακόρυφης μετατόπισης του.
β) Η απόσταση του σώματος από το σημείο βολής είναι τριπλάσια από την οριζόντια μετατόπιση του στο σημείο εκείνο.
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α. 20s, β. $40\sqrt{2}s$)

42. Ένα σώμα ρίχνεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_o$=10m/s από ύψος h=80m.
α) Να βρείτε το βεληνεκές του.
β) Σε ποια χρονική στιγμή το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι ίσο με $\upsilon_0\sqrt{2}$;
γ) Σε ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το σημείο βολής είναι $x\sqrt{2}$, όπου x είναι η αντίστοιχη οριζόντια μετατόπιση του;
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α. 40m, β. 1s, γ. 2s)

43. Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια, από το σημείο Ο(0,0) με αρχική ταχύτητα $υ_o$, από ορισμένο ύψος και μετά από λίγο βρίσκεται σε σημείο Α με συντεταγμένες Α(80m, -20m).
α) Ποια η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης $υ_o$;
β) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος στο σημείο Α.
γ) Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία 45° με τον ορίζοντα. Από ποιο ύψος έγινε η εκτόξευση του σώματος;
Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: α. 40m/s, β. $20\sqrt{5}m/s$ και $\varepsilon\phi\theta = \frac{1}{2}$, γ. 80m)

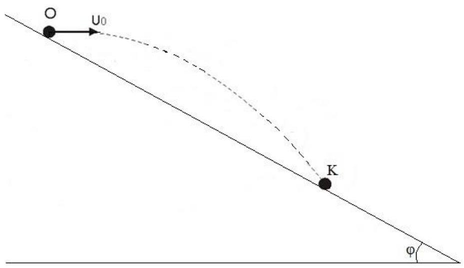
44. Σώμα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_o$ από ύψος h από το έδαφος. Να αποδείξετε ότι σε ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς με συντεταγμένες (x, y), η προέκταση του διανύσματος της ταχύτητας τέμνει τον οριζόντιο άξονα Ox στο σημείο $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$ ενώ τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $(0, -y)$.

45. Εκτοξεύουμε οριζόντια μια μπάλα με ταχύτητα $υ_o$=10m/s, από κάποιο σημείο που βρίσκεται σε ύψος h=1,8m πάνω από το έδαφος. Σε οριζόντια απόσταση d=4m από το σημείο εκτόξευσης υπάρχει ένας κατακόρυφος τοίχος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε ποιο σημείο θα χτυπήσει η μπάλα στον τοίχο; Δίνεται $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



(απ: 1m από το έδαφος)

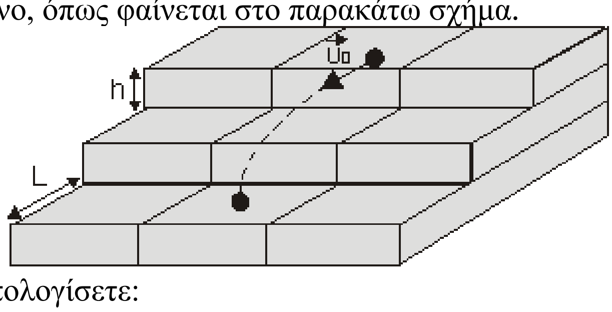
46. Στο κεκλιμένο επίπεδο μεγάλου μήκους του σχήματος που έχει γωνία κλίσης $\varphi = 30^0$, εκτοξεύουμε την $t = 0$ μικρή σφαίρα μάζας $m = 0{,}2\ kg$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 30\frac{m}{s}$ από το σημείο O. Η σφαίρα προσκρούει στο κεκλιμένο επίπεδο στη θέση K. Θεωρήστε ότι οι αντιστάσεις του αέρα είναι αμελητέες και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει τιμή $g = 10\frac{m}{s^2}$.



Να υπολογίσετε:
α την απόσταση του σημείου πρόσκρουσης της σφαίρας K από το σημείο εκτόξευσης O.
β) την ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο K.
γ) τη χρονική στιγμή που η σφαίρα αποκτά το μέγιστο ύψος απ' το κεκλιμένο επίπεδο.
δ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας απ' τη στιγμή που την εκτοξεύουμε μέχρι τη στιγμή που προσκρούει στο κεκλιμένο επίπεδο.

(απ. α. $t_1 = 2\sqrt{3}\ s$, β. $|\upsilon_1| = 10\sqrt{21}\frac{m}{s}$, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, γ. $t_{max} = \sqrt{3}$, δ. $\Delta K = 120\ J$)

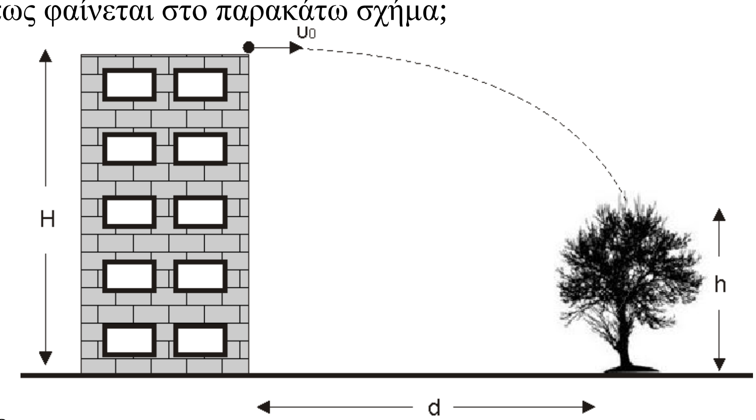
47. Τα σκαλοπάτια μιας σκάλας έχουν ύψος 20cm και μήκος 20cm. Μια μπάλα εκτοξεύεται οριζόντια από την άκρη ενός σκαλοπατιού και αφού περάσει ξυστά από το αμέσως παρακάτω προσκρούει στο επόμενο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εάν $g=10m/sec^2$, να υπολογίσετε:
α) Την οριζόντια ταχύτητα βολής της μπάλας.
β) Το σημείο σύγκρουσης της με το σκαλοπάτι.
γ) Την ταχύτητα σύγκρουσης.

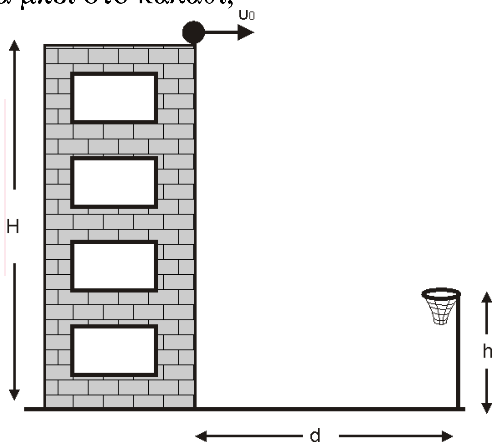
(απ: α. 1m/s, β. $x = 20\sqrt{2}cm$ και $y = 40cm$, γ. $\upsilon = 3\frac{m}{s}$ και $\varepsilon\varphi\theta = 2\sqrt{2}$)

48. Με πόση ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί οριζόντια μια πέτρα από τη οροφή κτιρίου που έχει ύψος H=9m, ώστε να χτυπήσει την κορυφή δέντρου που έχει ύψος h=4m και απέχει d=10m από το κτίριο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα;



Δίνεται $g=10m/s^2$.
(απ: 10m/s)

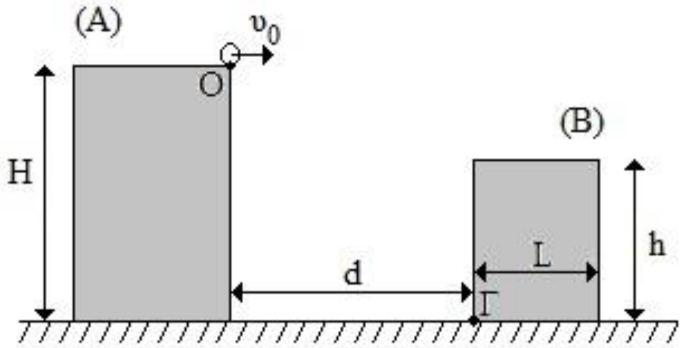
49. Από την ταράτσα ενός κτιρίου ύψους H=48m εκτοξεύει οριζόντια μια μπάλα με στόχο να μπει σε ένα καλάθι που βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση d=24m από το κτίριο και σε ύψος h=3m από το έδαφος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με ποια ταχύτητα πρέπει να εκτοξευτεί η μπάλα ώστε να μπει στο καλάθι;



Θεωρήστε ότι η μπάλα όσο και το καλάθι έχουν αμελητέες διαστάσεις και ότι δεν υπάρχει αντίσταση στην κίνηση της μπάλας από τον αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: $υ_ο$=8m/s)

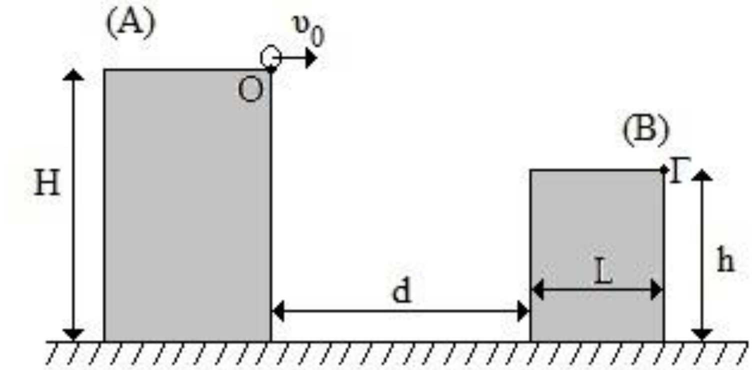
50.



Στην ταράτσα του κτιρίου (Β) και σ’ όλη την έκτασή της έχει φτιαχτεί πισίνα σχήματος τετραγώνου και πλευράς $L = 10\ m$. Το κτίριο (Α) έχει ύψος $H = 120\ m$, ενώ το κτίριο (Β) έχει ύψος $h = 100\ m$. Η απόσταση των δύο κτιρίων είναι $d = 20\ m$. Απ’ την άκρη Ο της ταράτσας του κτηρίου Α βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα $υ_0$ μια μικρή μπάλα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\frac{m}{s^2}$, ενώ οι αντιστάσεις του αέρα αμελούνται.

α) Για ποιες τιμές του μέτρου της ταχύτητας υ_0 το σώμα θα πέσει στο νερό της πισίνας;
β) Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της ταχύτητας υ_0 ώστε η μπάλα να πέσει ακριβώς στο κέντρο της πισίνας;
γ) Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στο νερό της πισίνας στην περίπτωση του ερωτήματος β.
δ) Να βρείτε το μέτρο της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας με την οποία πρέπει να εκτοξευτεί η μπάλα απ' τη θέση Ο ώστε να φτάσει στη βάση Γ του κτιρίου (Β).
(α. $10\frac{m}{s} \leq \upsilon_0 \leq 15\frac{m}{s}$, β. $\upsilon_0 = 12{,}5\frac{m}{s}$, γ. $\upsilon = \sqrt{556{,}25}\frac{m}{s}$, $εφθ = 1{,}6$, δ. $\upsilon_0' = \frac{5\sqrt{6}}{3}\frac{m}{s}$)

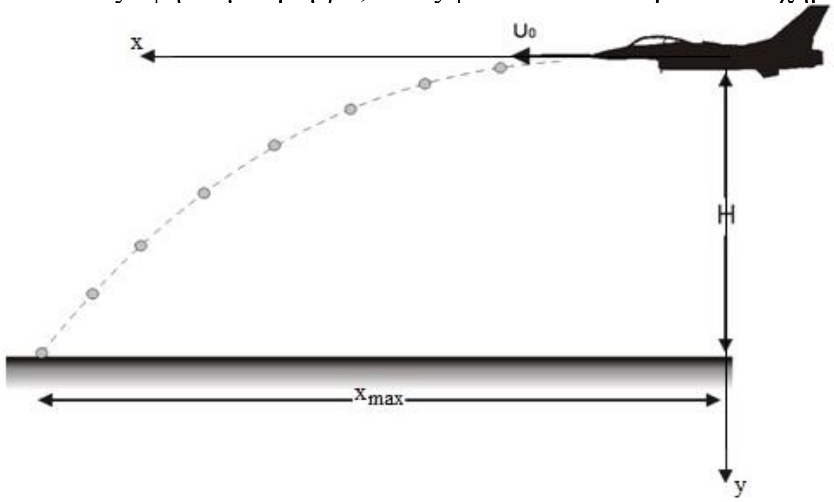
51.



Το κτίριο (Α) έχει ύψος $H = 125\ m$ ενώ το κτίριο (Β) έχει ύψος $h = 105\ m$ και πλάτος $L = 20\ m$. Τα δύο κτίρια απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 20\ m$. Σφαίρα βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα υ_0 απ' την άκρη Ο της ταράτσας του κτιρίου (Α).
α) Να υπολογίσετε το μέτρο της υ_0 ώστε η σφαίρα να περάσει ξυστά απ' την άκρη Γ της ταράτσας του κτιρίου Β.
β) Να υπολογίσετε το βεληνεκές της σφαίρας.
γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της σφαίρας όταν φτάνει στο έδαφος.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(α. $\upsilon_0 = 20\frac{m}{s}$, β. $x_{max} = 100\ m$, γ. $\upsilon = 10\sqrt{29}\frac{m}{s}$, $εφθ = 2{,}5$)

<u>Λυμένες Ασκήσεις - Ασκήσεις στις οποίες έχουμε την ταυτόχρονη κίνηση 2 σωμάτων (με το ένα ή και τα δυο να εκτελούν οριζόντια βολή)</u>

52. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος Η=500m από το έδαφος με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_o=200m/s. Ο πιλότος αφήνει μια βόμβα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να βρείτε:
α) Το χρόνο πτώσης της βόμβας μέχρι το έδαφος.

β) Τη μέγιστη οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η βόμβα απ' το σημείο βολής της βόμβας.

γ) Τη θέση του αεροπλάνου όταν η βόμβα χτυπά στο έδαφος θεωρώντας σαν αρχή του άξονα Οx το σημείο βολής της βόμβας.

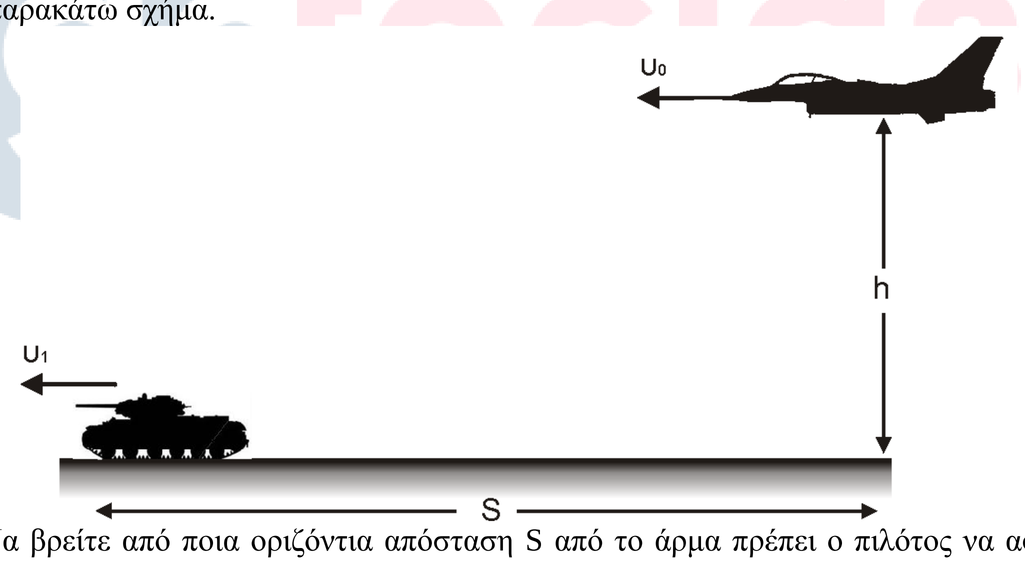
Δίνεται: $g=10m/s^2$.

Λύση:
α) Μέχρι να φτάσει στο έδαφος η βόμβα διανύει κατακόρυφη απόσταση $y=H \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2=500 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2=500 \Rightarrow \boxed{t=10s}$.

β) Η μέγιστη οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η βόμβα ισούται με $x_{\max}=\upsilon_0\cdot t \Rightarrow$
$x_{\max}=200\cdot 10 \Rightarrow \boxed{x_{\max}=2000m}$.

γ) Σε όλη τη διάρκεια της πτώσης η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας της βόμβας θα είναι ίση με την ταχύτητα του αεροπλάνου. Δηλαδή στον οριζόντιο άξονα βόμβα και αεροπλάνο, στον ίδιο χρόνο, διανύουν ίδιο διάστημα. Επομένως, το αεροπλάνο θα βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη βόμβα (σε ύψος 500m) όταν αυτή προσκρούει στο έδαφος.

53. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος h=180m από το έδαφος με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o=200m/s$. Στο έδαφος κινείται ομόρροπα άρμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1=10m/s$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



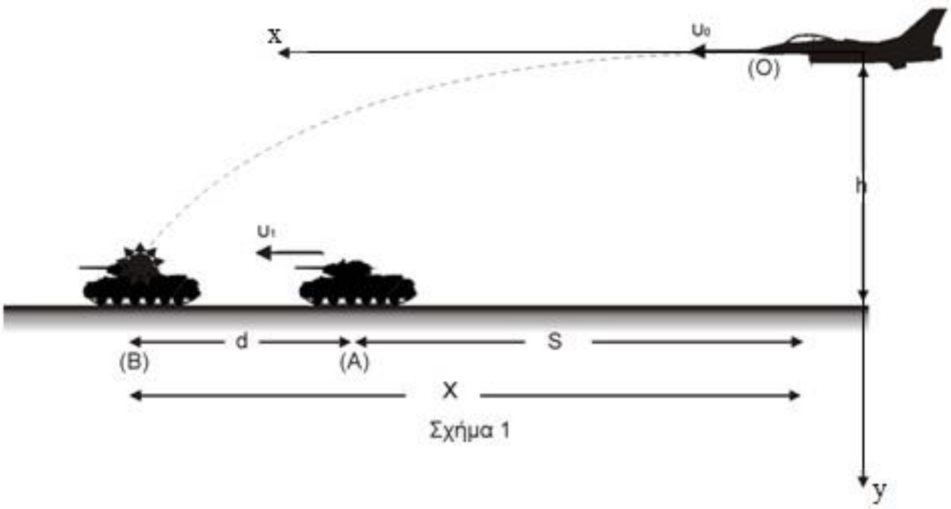
α) Να βρείτε από ποια οριζόντια απόσταση S από το άρμα πρέπει ο πιλότος να αφήσει μια βόμβα τη χρονική στιγμή $t=0$, ώστε αυτή να χτυπήσει το άρμα.
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της μετατόπισης του αεροπλάνου απ' τη θέση βολής τη στιγμή που η βόμβα χτυπά το άρμα.
γ) Να βρείτε την ίδια απόσταση S αν το άρμα κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου υ_1.
Δίνεται $g=10m/s^2$.

Λύση:
α) Έστω ότι το αεροπλάνο και το άρμα κινούνται ομόρροπα (σχήμα 1) και ο πιλότος θέλει να χτυπήσει το άρμα, που όταν αφήνεται η βόμβα βρίσκεται στη θέση (Α) την $t=0$. Μέχρι η βόμβα να φτάσει στο έδαφος $(t=t_k)$, το άρμα θα έχει διανύσει στον ίδιο χρόνο μια απόσταση d. Επομένως, σε αυτή τη περίπτωση πρέπει ο πιλότος να αφήσει τη βόμβα ώστε

όταν αυτή φτάσει σε μια θέση (Β) να έχει φτάσει την ίδια χρονική στιγμή και το άρμα στην ίδια θέση για να πετύχει το στόχο του.

> Για να συναντηθούν δύο κινητά (1), (2) πρέπει τη στιγμή t της συνάντησης να έχουν ταυτόχρονα την ίδια θέση, δηλαδή $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

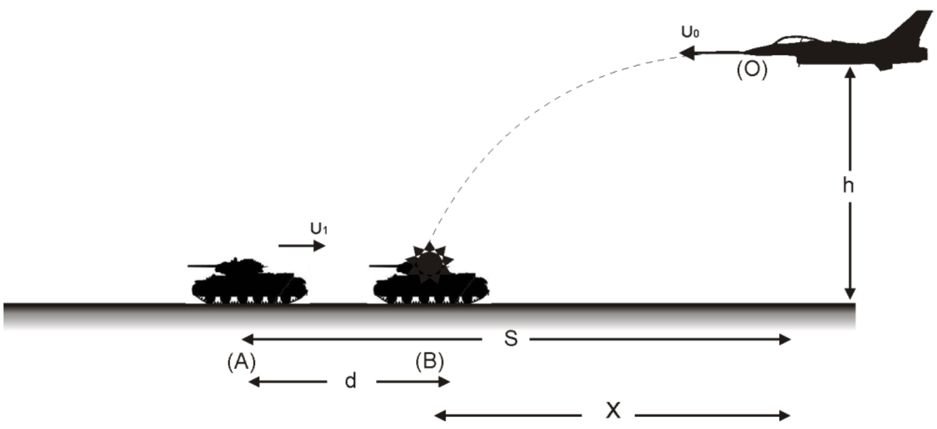
Η κατακόρυφη απόσταση που διανύει η βόμβα για να φτάσει από το σημείο εκτόξευσης (Ο) στο σημείο (Β) είναι $y = h \Rightarrow \frac{1}{2} g t_k^{\,2} = 180 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_k^{\,2} = 180 \Rightarrow t_k = 6s$. Άρα, ο χρόνος πτώσης της βόμβας είναι 6s. Σε αυτό το χρόνο η οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η βόμβα (βεληνεκές) ισούται με $x = \upsilon_0 \cdot t \Rightarrow x = 200 \cdot 6 \Rightarrow x = 1200m$. Στο ίδιο χρονικό διάστημα το άρμα θα έχει διανύσει απόσταση $d = \upsilon_1 \cdot t \Rightarrow d = 10 \cdot 6 \Rightarrow d = 60m$ Με βάση τα παραπάνω πρέπει για τις αποστάσεις να ισχύει $x = d + S \Rightarrow 1200 = 60 + S \Rightarrow \boxed{S = 1140m}$.



Σχήμα 1

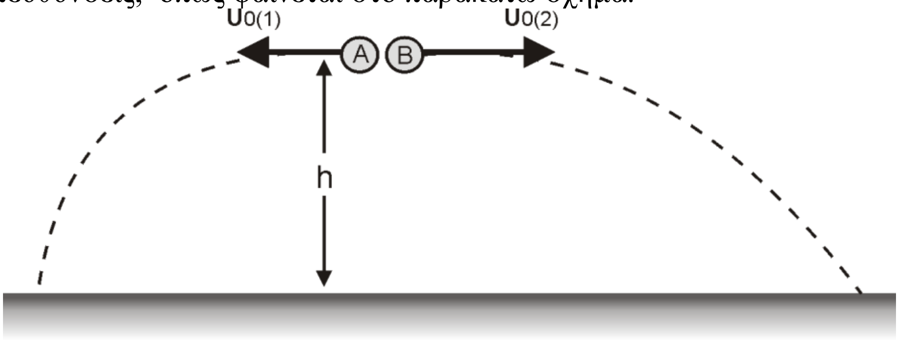
β) Το αεροπλάνο κινείται οριζόντια και ομαλά με ταχύτητα μέτρου υ_0. Άρα μέχρι να χτυπήσει η βόμβα το άρμα, το αεροπλάνο έχει μετατοπιστεί απ' το σημείο βολής κατά $x = \upsilon_0 t_k \Rightarrow \boxed{x_\alpha = 1200\ m}$.

γ) Έστω ότι το αεροπλάνο και το άρμα κινούνται αντίρροπα (σχήμα 2) και ο πιλότος θέλει να χτυπήσει το άρμα, που όταν αφήνεται η βόμβα βρίσκεται στη θέση (Α). Σε αυτή την περίπτωση για τις αποστάσεις πρέπει να ισχύει $S = x + d \Rightarrow S = 1200 + 60 \Rightarrow \boxed{S = 1260m}$.



Σχήμα 2

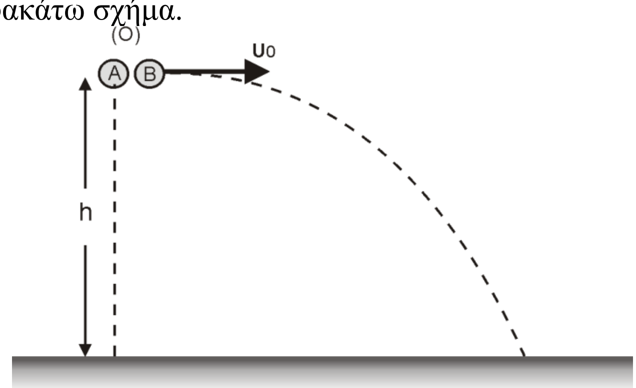
54. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h=20m από το οριζόντιο έδαφος εκτοξεύονται ταυτόχρονα οριζόντια δύο μπάλες (Α) και (Β) με ταχύτητες υ_{o1}=10m/s και υ_{o2}=20m/s σε αντίθετες κατευθύνσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Πόσο θα απέχουν μεταξύ τους όταν θα φτάσουν στο έδαφος;
Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων καθώς και την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:
Και οι δυο μπάλες φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος διανύοντας απόσταση $y = h \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 = 20 \Rightarrow t = 2s$. Άρα, ο χρόνος πτώσης κάθε μπάλας είναι 2s. Σε αυτό το χρονικό διάστημα η μπάλα (Α) θα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) $x_A = \upsilon_{0(1)} \cdot t \Rightarrow x_A = 10 \cdot 2 \Rightarrow x_A = 20m$. Στο ίδιο χρονικό διάστημα η μπάλα (Β) θα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) $x_B = \upsilon_{0(2)} \cdot t \Rightarrow x_B = 20 \cdot 2 \Rightarrow x_B = 40m$. Επομένως, όταν οι μπάλες φτάνουν στο έδαφος θα απέχουν οριζόντια απόσταση $\boxed{x_A + x_B = 60m}$.

55. Από ένα σημείο (Ο) που βρίσκεται σε ύψος h=20m από το έδαφος αφήνεται να πέσει ένα σώμα Α ενώ ταυτόχρονα εκτοξεύεται οριζόντια ένα σώμα Β με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\frac{m}{s}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

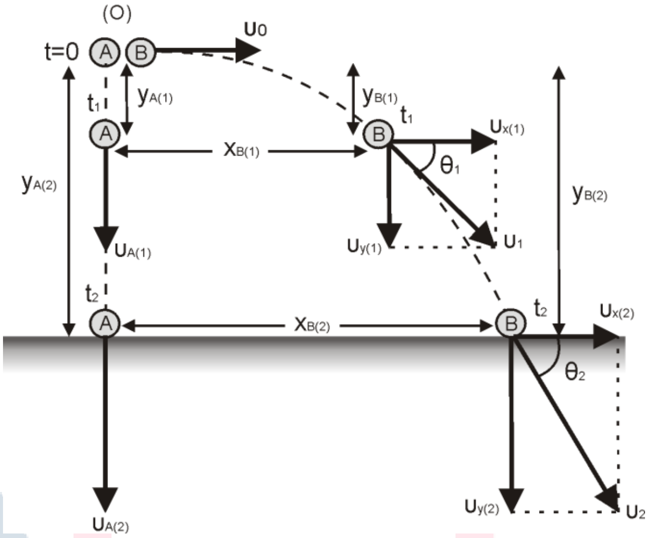


Να βρείτε:
α) Που βρίσκονται τα δυο σώματα τη χρονική στιγμή t_1=1s.
β) Ποια γωνία σχηματίζει την t_1 η ταχύτητα του σώματος Β με τον ορίζοντα.
γ) Σε πόσο χρόνο κάθε σώμα φτάνει στο έδαφος.
δ) Σε ποιο σημείο το σώμα Β θα φτάσει στο έδαφος και η ταχύτητα του εκείνη τη στιγμή.

ε) Τη μετατόπιση του σώματος Β από το σημείο εκτόξευσης (Ο) μέχρι να φτάσει στο έδαφος. Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων καθώς και την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\dfrac{m}{s^2}$.

Λύση:

α) Το σώμα Α εκτελεί ελεύθερη πτώση. Επομένως, την t_1 θα έχει κατέβει από το σημείο (Ο) κατά $y_{A(1)} = \dfrac{1}{2}g{t_1}^2 \Rightarrow y_{A(1)} = \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 1^2 \Rightarrow y_{A(1)} = 5m$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το σώμα Β εκτελεί οριζόντια βολή. Άρα στον ίδιο χρόνο θα έχει κατέβει $y_{B(1)} = \dfrac{1}{2}g{t_1}^2 \Rightarrow y_{B(1)} = y_{A(1)} \Rightarrow y_{B(1)} = 5m$. Δηλαδή κάθε χρονική στιγμή της κίνησης τους τα δυο σώματα θα έχουν διανύσει την ίδια κατακόρυφη απόσταση. Το σώμα Β, σε χρόνο t_1, θα έχει διανύσει και οριζόντια απόσταση $x_{B(1)} = \upsilon_0 \cdot t_1 \Rightarrow x_{B(1)} = 10\cdot 1 \Rightarrow x_{B(1)} = 10m$. Επομένως, τη χρονική στιγμή t_1 και τα δυο σώματα θα έχουν κατέλθει κατά 5m από το σημείο (Ο) και η μεταξύ τους οριζόντια απόσταση θα είναι 10m.

β) Τη χρονική στιγμή t_1 η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας του σώματος Β θα είναι $\upsilon_{x(1)} = \upsilon_0 \Rightarrow \upsilon_{x(1)} = 10\dfrac{m}{s}$, ενώ την ίδια στιγμή η κατακόρυφη συνιστώσα θα είναι $\upsilon_{y(1)} = g\cdot t_1 \Rightarrow \upsilon_{y(1)} = 10\cdot 1 \Rightarrow \upsilon_{y(1)} = 10\dfrac{m}{s}$. Εκείνη τη στιγμή θα ισχύει $\varepsilon\varphi\theta_1 = \dfrac{\upsilon_{y(1)}}{\upsilon_{x(1)}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = \dfrac{10}{10} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = 45^0}$.

γ) Όταν το σώμα Β φτάνει στο έδαφος θα έχει διανύσει κατακόρυφη απόσταση $y_{B(2)} = h \Rightarrow \dfrac{1}{2}g{t_2}^2 = 20 \Rightarrow t_2 = 2s$, όπου t_2 ο χρόνος πτώσης του σώματος Β. Την ίδια στιγμή προσκρούει και το σώμα Α στο έδαφος σε σημείο που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το σημείο (Ο) γιατί $y_{A(2)} = h \Rightarrow \frac{1}{2}g{t_2'}^2 = 20 \Rightarrow t_2' = 2\ s$.

Όταν ένα σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h και απ' το ίδιο ύψος αφήνεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο σώμα να πέσει ελεύθερα, τότε τα δύο σώματα φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος αφού και τα δύο στον κατακόρυφο άξονα διανύουν ίδιο ύψος h εκτελώντας ελεύθερη πτώση.

δ) Το σώμα Β, τη χρονική στιγμή t_2, θα έχει διανύσει οριζόντια απόσταση ίση με:

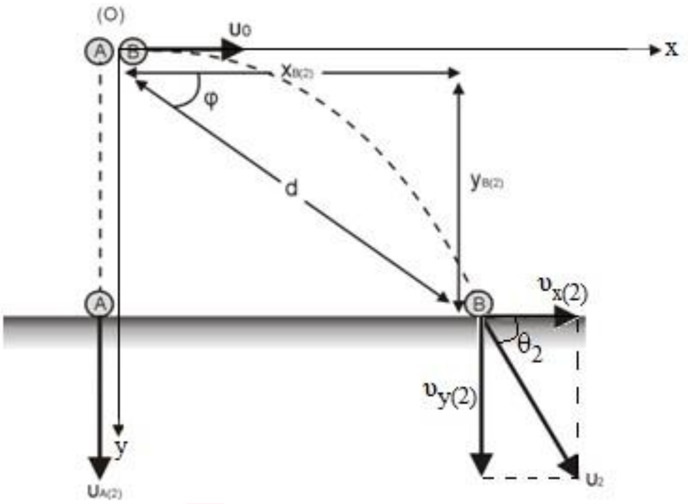
$x_{B(2)} = \upsilon_0 \cdot t_2 \Rightarrow x_{B(2)} = 10\cdot 2 \Rightarrow$

$x_{B(2)} = 20m$. Άρα το σημείο Β βρίσκεται στη

θέση $(20\,m, 20\,m)$. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Β τη στιγμή που προσκρούει στο έδαφος θα είναι ίσο με: $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{x(2)}^2 + \upsilon_{y(2)}^2} \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{10^2 + 20^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 10\sqrt{5}\,\frac{m}{s}}$. Η κατεύθυνση της ταχύτητας θα είναι $\varepsilon\varphi\theta_2 = \dfrac{\upsilon_{y(2)}}{\upsilon_{x(2)}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta_2 = \dfrac{20}{10} \Rightarrow$

$\boxed{\varepsilon\varphi\theta_2 = 2}$.

ε) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η μετατόπιση του σώματος Β από το σημείο εκτόξευσης (Ο) μέχρι να φτάσει στο έδαφος έχει μέτρο:

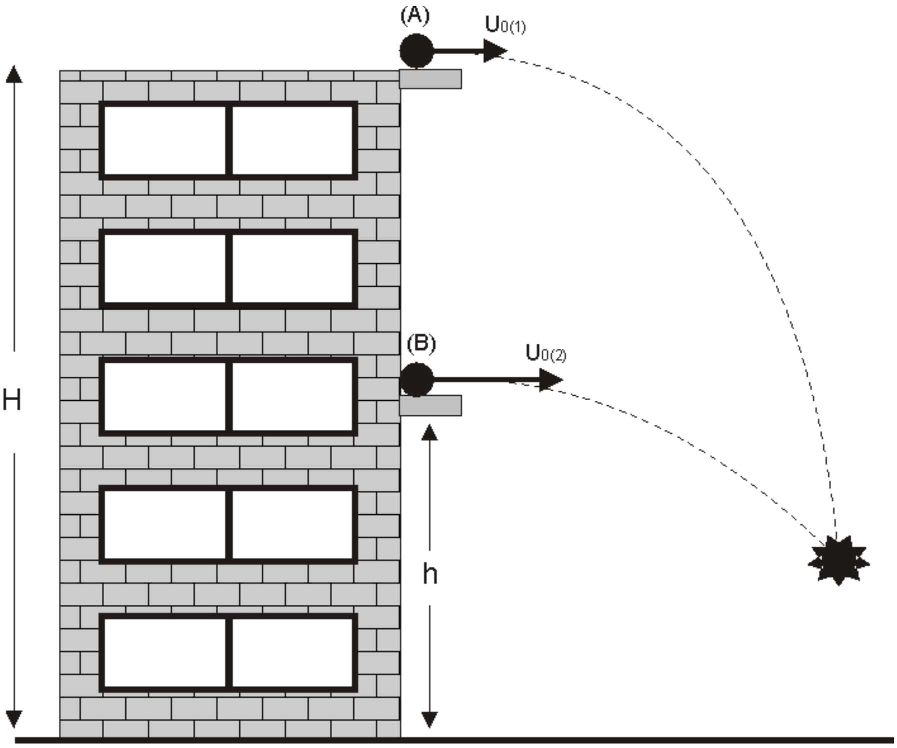


$d = \sqrt{x_{B(2)}{}^2 + y_{B(2)}{}^2} \Rightarrow d = \sqrt{20^2 + 20^2} \Rightarrow \boxed{d = 20\sqrt{2}m}$

και κατεύθυνση $\varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{y_{B(2)}}{x_{B(2)}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \dfrac{20}{20} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\varphi = 1}$.

Η μετατόπιση του σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή είναι διανυσματικό μέγεθος άρα όταν μας ζητείται, εκτός από το μέτρο της πρέπει να προσδιορίζουμε και τη γωνία φ που προσδιορίζει την κατεύθυνσή της.

56. Από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη, σε ύψος H=80m, εκτοξεύεται οριζόντια μια μπάλα (Α) με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{0(1)} = 10\frac{m}{s}$, τη χρονική στιγμή t=0. Μετά από λίγο, τη χρονική στιγμή t_1=2s, εκτοξεύεται επίσης οριζόντια μια δεύτερη μπάλα (Β), από ένα μπαλκόνι σε ύψος h=40m, με αποτέλεσμα οι δυο μπάλες να συγκρούονται πριν φτάσουν στο έδαφος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να βρείτε:

α) Ποια χρονική στιγμή οι δυο μπάλες συγκρούονται.

β) Σε ποιο ύψος από το έδαφος συγκρούονται.

γ) Το μέτρο της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας $\upsilon_{0(2)}$ της (Β) μπάλας.

δ) Το ύψος που έπρεπε να εκτοξεύσουμε οριζόντια τη μπάλα (Β) και το μέτρο της αρχικής ταχύτητάς της $\upsilon'_{0(2)}$, ώστε να συγκρουστούν τη στιγμή που φτάνουν και οι δυο μπάλες ταυτόχρονα στο έδαφος.

Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων καθώς και την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

Λύση:

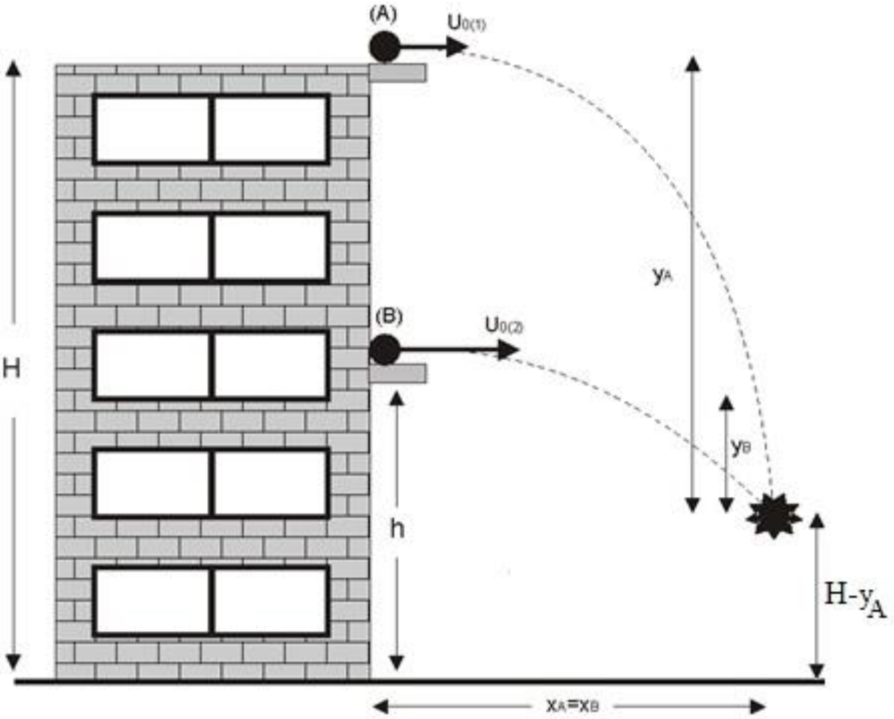
α) Η στιγμή της σύγκρουσης είναι η στιγμή t_2 (μετρούμενη απ' τη στιγμή $t = 0$). Μέχρι τότε το σώμα (Α) έχει κινηθεί για χρονικό διάστημα t_2, ενώ το σώμα (Β) για χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$, αφού βάλλεται τη στιγμή t_1 και όχι την $t = 0$.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σήμα, τη στιγμή της σύγκρουσης η μπάλα (Α) θα έχει κατέβει κατά y_A ενώ η μπάλα (Β) κατά y_B. Η στιγμή της σύγκρουσης είναι η στιγμή t_2 (μετρούμενη απ' τη στιγμή $t = 0$). Μέχρι τότε το σώμα Α έχει κινηθεί για χρονικό διάστημα t_2 ενώ το σώμα Β για χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ αφού βάλλεται τη στιγμή t_1 και όχι τη στιγμή $t = 0$.

Για αυτές τις αποστάσεις θα ισχύει $y_A - y_B = (H - h) \Rightarrow y_A = y_B + (H - h) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} g t_2^{\ 2} = \frac{1}{2} g (t_2 - t_1)^2 + (H - h) \Rightarrow 5t_2^{\ 2} = 5(t_2 - 2)^2 + 40 \Rightarrow 5t_2^{\ 2} = 5\left(t_2^{\ 2} - 4t_2 + 4\right) + 40 \Rightarrow$$

$$5t_2^{\ 2} = 5t_2^{\ 2} - 20t_2 + 20 + 40 \Rightarrow 20t_2 = 60 \Rightarrow \boxed{t_2 = 3s}.$$



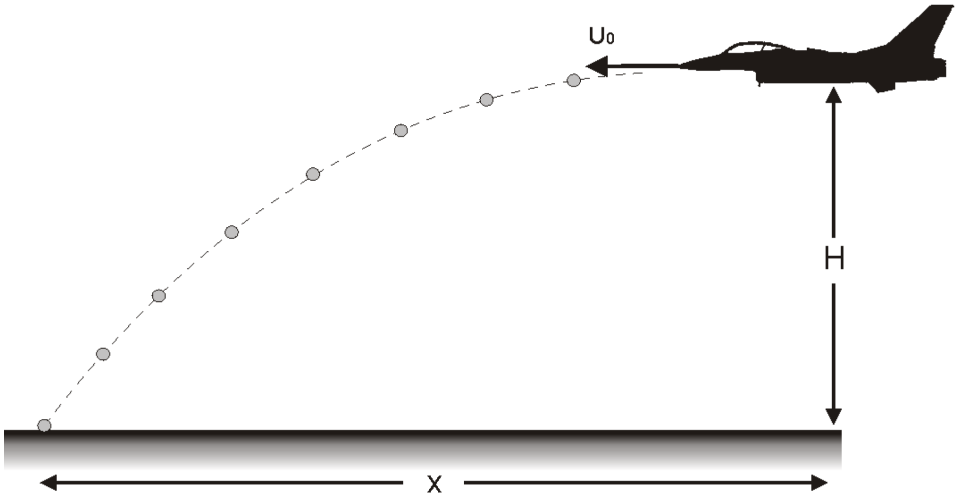
β) $y_A = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_A = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 3^2 \Rightarrow y_A = 45m$. Επομένως, η απόσταση από το έδαφος του σημείου σύγκρουσης θα είναι $\boxed{H - y_A = 35m}$.

γ) Οι οριζόντιες αποστάσεις που θα έχουν διανύσει οι δυο μπάλες, μέχρι τη στιγμή της σύγκρουσης, θα είναι ίσες. Δηλαδή, $x_A = x_B \Rightarrow \upsilon_{0(1)} \cdot t_2 = \upsilon_{0(2)} \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow 10 \cdot 3 = \upsilon_{0(2)} \cdot 1 \Rightarrow$ $\boxed{\upsilon_{0(2)} = 30\frac{m}{s}}$.

δ) Για να συγκρούονταν οι δυο μπάλες όταν θα έφταναν στο έδαφος πρέπει η κατακόρυφη απόσταση που θα διανύσει η μπάλα (Α) να ισούται με το ύψος του κτηρίου. Δηλαδή, $y_A = H \Rightarrow \frac{1}{2}gt_3^{\ 2} = 80 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot t_3^{\ 2} = 80 \Rightarrow t_3 = 4s$. Άρα, σε αυτή τη περίπτωση ο χρόνος πτώσης της μπάλας (Α) θα ήταν 4s. Σε αυτή τη περίπτωση, η κατακόρυφη απόσταση που θα διανύσει η μπάλα (Β) μέχρι το έδαφος θα ισούται με $y_B = \frac{1}{2}g(t_3 - t_1)^2 \Rightarrow y_B = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot (4-2)^2 \Rightarrow y_B = 20m$. Άρα το ύψος που θα έπρεπε να εκτοξεύσουμε τη μπάλα (Β) προκειμένου να συγκρουστεί με την μπάλα (Α) όταν και οι δυο φτάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος είναι $h = y_B \Rightarrow \boxed{h = 20m}$. Για να συγκρουστούν στο έδαφος πρέπει μέχρι τη στιγμή που φτάνουν στο έδαφος να έχουν εκτελέσει ίδια οριζόντια μετατόπιση (βεληνεκές), δηλαδή $x_{max1} = x_{max2} \Rightarrow \upsilon_{0(1)}t_3 = \upsilon'_{0(2)}(t_3 - t_1) \Rightarrow 10 \cdot 4 = \upsilon'_{0(2)}(4-2) \Rightarrow \boxed{\upsilon'_{0(2)} = 20\,\frac{m}{s}}$.

Άλυτες Ασκήσεις - Ασκήσεις στις οποίες έχουμε την ταυτόχρονη κίνηση 2 σωμάτων (με το ένα ή και τα δυο να εκτελούν οριζόντια βολή)

57. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος H=320m από το έδαφος με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ_o=100m/s. Ο πιλότος αφήνει μια βόμβα.

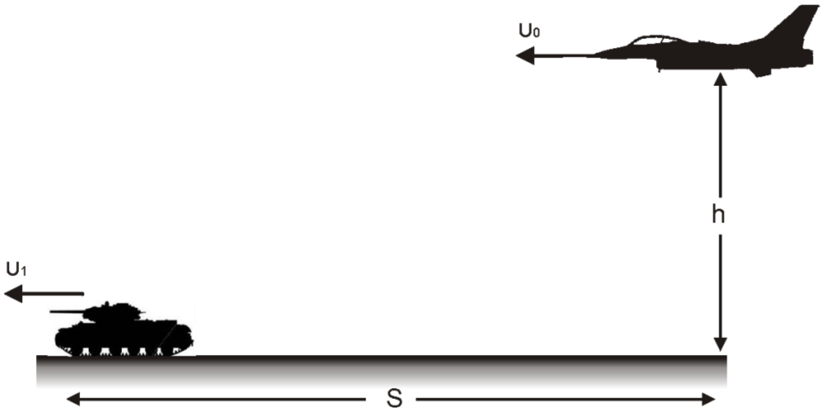


Να βρείτε τη θέση του αεροπλάνου όταν η βόμβα χτυπά στο έδαφος, τον χρόνο που κάνει η βόμβα μέχρι να φτάσει εκεί και την οριζόντια μετατόπιση της από το σημείο που αφέθηκε. Δίνεται: g=10m/s^2.
(απ: κάθε στιγμή το αεροπλάνο θα βρίσκεται ακριβώς πάνω από τη βόμβα, 8s, 800m).

58. Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος 500m από το έδαφος και αφήνει βόμβα τη στιγμή που απέχει οριζόντια απόσταση 600m από τον προκαθορισμένο στόχο. Αν θεωρήσουμε την βαρυτική επιτάχυνση σταθερή και ίση με 10m/s^2, να υπολογίσετε την τιμή της ταχύτητας του αεροπλάνου, ώστε ο βομβαρδισμός να είναι επιτυχής.
(απ: 60m/s)

59. Ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο κινείται σε σταθερό ύψος 320m με ταχύτητα $\upsilon_0 = 180 m/s$. Τεθωρακισμένο όχημα κινείται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_{οχ} = 10 m/s$ ομόρροπη με του αεροπλάνου στο έδαφος. Πόση πρέπει να είναι η οριζόντια απόσταση S μεταξύ αεροπλάνου και οχήματος τη στιγμή που το αεροπλάνο αφήνει ελεύθερη βόμβα, ώστε αυτή να χτυπήσει το όχημα; Δίνεται g=10m/s^2.
(απ: 1360m)

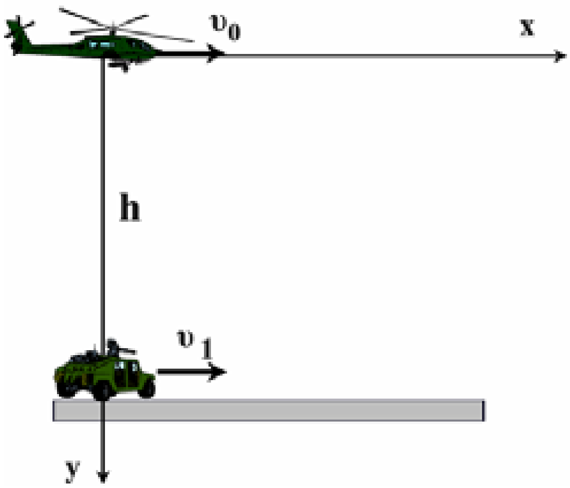
60. Αεροπλάνο κινείται οριζόντια σε ύψος h=320m από το έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ_o=100m/s. Στο έδαφος κινείται ομόρροπα άρμα με ταχύτητα μέτρου υ_1=10m/s, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε από ποια οριζόντια απόσταση S από το άρμα πρέπει ο πιλότος να αφήσει μια βόμβα, ώστε αυτή να χτυπήσει το άρμα.
β) Να βρείτε την ίδια απόσταση S αν το άρμα κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου υ_1.
Δίνεται $g=10m/s^2$.
(απ: α. 720m, β. 880m)

61. Ένα αεροπλάνο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\upsilon_A=288Km/h$ σε ύψος h=180m. Κάποια στιγμή ανοίγει μια καταπακτή και ελευθερώνεται ένα κιβώτιο. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα ενώ το $g=10m/sec^2$. Να υπολογίσετε:
α) Μετά από πόσο χρόνο φτάνει το κιβώτιο στο έδαφος.
β) Με ποια ταχύτητα προσκρούει το κιβώτιο στο έδαφος.
γ) Ποια η οριζόντια μετατόπιση του κιβωτίου από το σημείο που αφέθηκε μέχρι την πρόσκρουση του στο έδαφος.
δ) Πόσο απέχει το κιβώτιο από το αεροπλάνο σε χρόνο t=2sec από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο.
(απ: α. 6s, β. 100m/s και $\varepsilon\phi\theta=\frac{3}{4}$, γ. 480m, δ. 20m κατακόρυφη απόσταση)

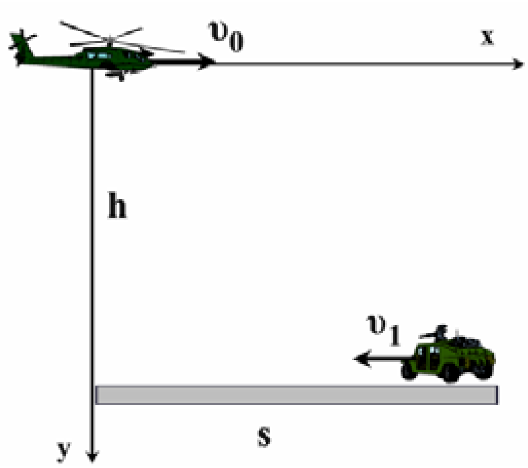
62. Ελικόπτερο κινείται οριζόντια σε ύψος h=125m με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_o=100m/s$. Όχημα κινείται στο έδαφος στην ίδια κατεύθυνση με το ελικόπτερο και με ταχύτητα υ_1, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που το ελικόπτερο βρίσκεται πάνω από το όχημα, αφήνει μια βόμβα. Με πόση ταχύτητα πρέπει να κινείται το όχημα ώστε το βλήμα να πέσει στο έδαφος σε απόσταση s=400m μπροστά του.
Δίνεται $g=10m/s^2$.

(απ: $υ_1$=20m/s)

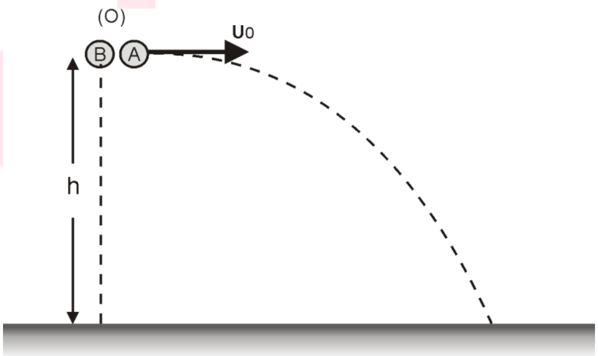
63. Ελικόπτερο κινείται οριζόντια σε ύψος h με σταθερή ταχύτητα $υ_ο$=100m/s. Όχημα κινείται στο έδαφος αντίθετα από το ελικόπτερο και με σταθερή ταχύτητα $υ_1$=20m/s, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Σε ποιο ύψος h πρέπει να βρίσκεται το ελικόπτερο, ώστε αν αφήσει τη βόμβα του τη στιγμή που η οριζόντια απόστασή του από το όχημα είναι s=1200m, να είναι δυνατόν να το χτυπήσει.
β) Αν το ελικόπτερο συνεχίσει την κίνησή του με την ίδια ταχύτητα, πού θα βρίσκεται σε σχέση με το όχημα όταν το βλήμα πέφτει πάνω του;
Δίνεται g=10m/s^2.
(απ: α. h=500m, β. από πάνω του)

64. Αεροπλάνο κινείται σε ύψος h=980m από το έδαφος με σταθερή ταχύτητα μέτρου υ=70m/s. Ο πιλότος του θέλει να βομβαρδίσει στόχο στο έδαφος. Με ποια γωνία κάτω από τον ορίζοντα πρέπει να δει ο πιλότος τον στόχο τη στιγμή που αφήνει τη βόμβα; Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: 45^0)

65. Από ένα σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h=80m από το έδαφος, εκτοξεύεται οριζόντια ένα σώμα Α, με αρχική ταχύτητα $υ_ο$=30m/s, ενώ ταυτόχρονα αφήνεται να πέσει (από το Ο) ένα δεύτερο σώμα Β.



α) Πού βρίσκονται τα δύο σώματα μετά από 2s;
β) Σε πόσο χρόνο κάθε σώμα θα φτάσει στο έδαφος;
γ) Σε ποιο σημείο το σώμα Α θα πέσει στο έδαφος και ποια η ταχύτητά του, την στιγμή εκείνη;
Δίνεται: g=10m/s^2.
(απ: α. 60m πάνω από το έδαφος και η οριζόντια απόσταση τους 60m, β. 4s, γ. ορ. Απόσταση 120 m από το σημείο βολής, 50m/s και $εφθ = \frac{4}{3}$)

66. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h=125m από το οριζόντιο έδαφος εκτοξεύονται ταυτόχρονα οριζόντια δύο σώματα με ταχύτητες $υ_1$=6m/s και $υ_2$=10m/s σε αντίθετες κατευθύνσεις. Πόσο θα απέχουν μεταξύ τους όταν θα φτάσουν στο έδαφος;
Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων καθώς και την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.
(απ: d=80m)

67. Δύο σώματα βρίσκονται στο ίδιο ύψος h=10m και απέχουν μεταξύ τους οριζόντια απόσταση d=30m. Τα δύο σώματα εκτοξεύονται ταυτόχρονα με οριζόντιες αρχικές ταχύτητες $υ_ο$=10m/s

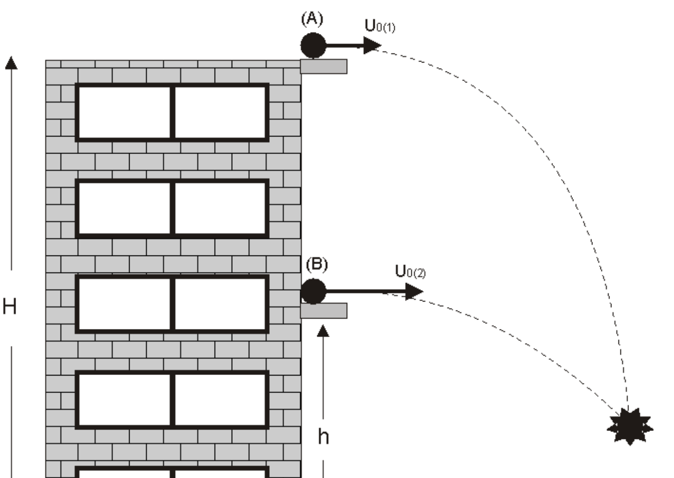
και $u_o{}'$=20m/s σε αντίθετη κατεύθυνση. Να βρεθούν μετά πόσο χρόνο και σε ποιο ύψος από το έδαφος τα δύο σώματα θα συναντηθούν. Δίνεται g=10m/s^2.
(απ: t=1s, d=5m)

68. Στόχος, σ, και βλήμα, β, βρίσκονται στο ίδιο ύψος h=100m και απέχουν μεταξύ τους οριζόντια απόσταση d=60m. Ο στόχος αφήνεται ελεύθερος να πέσει ελεύθερα στο κενό, ενώ την ίδια στιγμή το βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα και $υ_o$=20m/s. Να βρεθούν:
α) Το ύψος d από το έδαφος στο οποίο το βλήμα θα συναντήσει το στόχο.
β) Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων τη στιγμή της συνάντησης.
Δίνεται g=10m/s^2.
(απ: α. 55m, β. $υ_σ$=30m/s ,$υ_β=10\sqrt{13}$m/s)

69. Δυο σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=160m. Τα σώματα βάλλονται ταυτόχρονα με οριζόντιες ταχύτητες $υ_{ο1}$=10m/sec και $υ_{ο2}$=30m/sec. Τα δυο σώματα προσκρούουν στο έδαφος στο ίδιο σημείο. Εάν g=10m/sec^2, να υπολογίσετε:
α) Το ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε το κάθε σώμα.
β) Την απόσταση του σημείου πτώσης από την κατακόρυφη.
γ) Τα μέτρα των ταχυτήτων πρόσκρουσης στο έδαφος του κάθε σώματος.
(απ: α. $h_1 = 180m$ και $h_2 = 20m$, β. 60m, γ. $\upsilon_1 = 10\sqrt{37}\, m/s$, $\upsilon_2 = 10\sqrt{13}\, m/s$)

70. Από ένα σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h=80m από το έδαφος, εκτοξεύεται οριζόντια ένα σώμα Α, με αρχική ταχύτητα $υ_o$=30m/s, ενώ ταυτόχρονα αφήνεται να πέσει (από το Ο) ένα δεύτερο σώμα Β.
α) Πόσο απέχουν τα δύο σώματα μετά από 2s;
β) Σε πόσο χρόνο κάθε σώμα θα φτάσει στο έδαφος;
γ) Πόσο απέχουν τα δυο σώματα όταν φτάνουν στο έδαφος;
δ) Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία φτάνει κάθε σώμα στο έδαφος;
Δίνεται g=10m/s^2, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
(απ: α. 60m, β. 4s, γ. 120m, δ. $\upsilon_B = 40m/s$, $\upsilon_A = 50m/s$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{4}{3}$)

71. Από την ταράτσα ενός ουρανοξύστη, σε ύψος H=80m, εκτοξεύεται οριζόντια μια μπάλα (A) με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{0(1)} = 10\frac{m}{s}$, τη χρονική στιγμή t=0. Μετά από λίγο, τη χρονική στιγμή t_1=2s, εκτοξεύεται επίσης οριζόντια μια δεύτερη μπάλα (B), από ένα μπαλκόνι σε ύψος h=20m, με αποτέλεσμα οι δυο μπάλες να συγκρούονται πριν προσκρούσουν στο έδαφος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



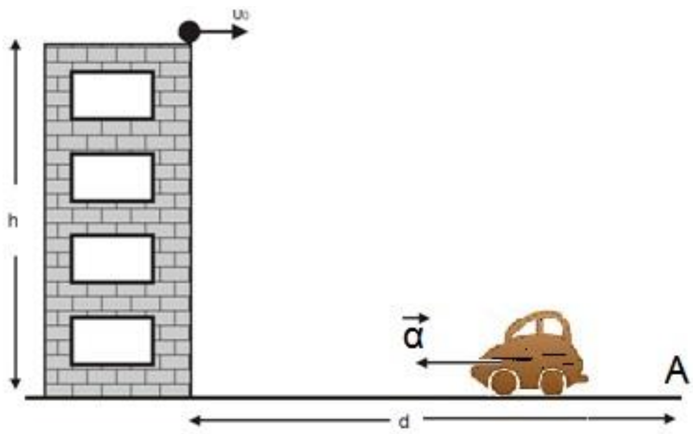
Να βρείτε:

α) Ποια χρονική στιγμή οι δυο μπάλες συγκρούονται.
β) Σε ποιο ύψος από το έδαφος συγκρούονται.
γ) Το μέτρο της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας $\upsilon_{0(2)}$ της (Β) μπάλας.

Θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις των σωμάτων καθώς και την αντίσταση του αέρα. Δίνεται $g = 10\frac{m}{s^2}$.

(απ: α) t=4s, β) Συγκρούονται στο έδαφος, γ) $\upsilon_{0(2)} = 20\frac{m}{s}$)

72. Ένα παιδικό παιχνίδι που βρίσκεται στο ανοικτό παράθυρο ενός ορόφου μιας πολυκατοικίας και σε ύψος h=20m πάνω από το έδαφος μπορεί να εκτοξεύει μικρές μπάλες με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o=5m/s. Ένα τηλεκατευθυνόμενο μικρό αυτοκίνητο βρίσκεται ακίνητο σε σημείο Α του εδάφους και απέχει από την πολυκατοικία απόσταση d=30m. Τη χρονική στιγμή t=0 το τηλεκατευθυνόμενο αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση α=1,6m/s^2 προς την πολυκατοικία όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t_1 το παιδικό παιχνίδι εκτοξεύεται μια μικρή μπάλα, η οποία χτυπά το αυτοκίνητο τη χρονική στιγμή t_2. Να υπολογίσετε:



α) το διάστημα που διένυσε το αυτοκίνητο από τη χρονική στιγμή t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή που το χτύπησε η μπάλα
β) τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.
(απ. α) 20m β) 3s, 5s)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις να θεωρηθούν οι αντιστάσεις του αέρα αμελητέες

1. Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω διατύπωση :
Πετάμε μια μικρή μπάλα οριζόντια από ύψος h με ταχύτητα υ_o. Ο χρόνος για να φτάσει η μπάλα στο έδαφος δίνεται από την σχέση ……………. Η κίνηση της μπάλας μπορεί να αναλυθεί σε δυο κινήσεις. Το είδος της οριζόντιας κίνησης είναι …………….. …….……………. και το είδος της κατακόρυφης …………….. …………….. Η ταχύτητα στην οριζόντια κίνηση είναι ………… και η αρχική ταχύτητα στην κατακόρυφη κίνηση είναι …………….. Η ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος είναι …………….. από την υ_o.

2. Η οριζόντια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας είναι σύνθετη κίνηση που μπορεί να αναλυθεί σε δύο κινήσεις οι οποίες είναι:
α) Ομαλά επιταχυνόμενες σε κάθε άξονα.

β) Ομαλή στο άξονα Ox και ελεύθερη πτώση στον άξονα Oy.
γ) Ομαλή και στους δύο άξονες.
δ) Ομαλή στον άξονα Ox, ομαλά επιταχυνόμενη στον Oy με αρχική ταχύτητα $υ_o$ και επιτάχυνση g.
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

3. Η οριζόντια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας είναι κίνηση που πραγματοποιείται:
α) Σε οριζόντιο άξονα
β) Σε κατακόρυφο άξονα
γ) Σε κατακόρυφο επίπεδο
δ) Σε οριζόντιο επίπεδο.
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

4. Στην οριζόντια βολή στο ομογενές πεδίο βαρύτητας από ύψος h, η τροχιά του σώματος είναι:
α) Οριζόντια και ευθύγραμμη
β) Κατακόρυφη και ευθύγραμμη
γ) Τυχαία καμπύλη
δ) Παραβολική
Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

5. Σε μια οριζόντια βολή σε ομογενές βαρυτικό πεδίο η ταχύτητα του σώματος είναι κάθε στιγμή:
α) οριζόντια
β) κατακόρυφη
γ) εφαπτόμενη στην παραβολική τροχιά του σώματος
δ) εφαπτόμενη στην ελλειπτική τροχιά του σώματος.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

6. Σώμα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0 από μικρό ύψος H. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Για μια χρονική στιγμή t της κίνησης του σώματος να αντιστοιχήσετε τα μεγέθη της αριστερής στήλης με της δεξιάς του παρακάτω πίνακα:

1. Οριζόντια μετατόπιση x	α. $\frac{1}{2}gt^2$
2. Κατακόρυφη μετατόπιση y	β. υ_0
3. Οριζόντια ταχύτητα υ_x	γ. gt
4. Κατακόρυφη ταχύτητα υ_y	δ. $\sqrt{\upsilon_0^2 + (gt)^2}$
5. Ταχύτητα υ	ε. $\sqrt{\frac{2H}{g}}$
6. Ολικός χρόνος κίνησης	στ. $\upsilon_0 t$

7. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
Η εξίσωση της τροχιάς σε μια οριζόντια βολή ενός σώματος είναι:
α) η χρονοεξίσωση της οριζόντιας μετατόπισής του.
β) η χρονοεξίσωση της κατακόρυφης μετατόπισής του.
γ) η σχέση που συνδέει την οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος.
δ) η χρονοεξίσωση της κατακόρυφης ταχύτητας του σώματος.
ε) η απόδειξη ότι το σώμα εκτελεί παραβολική τροχιά.

8. Σώμα εκτελεί οριζόντια βολή από μικρό ύψος h με αρχική ταχύτητα υ_0. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Η εξίσωση της τροχιάς της κίνησης είναι:

α) $y = \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$.

β) $y = \frac{g}{2\upsilon_0}x^2$.

γ) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_y^2}$.

δ) $y = \frac{1}{2}gt^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

9. Σώμα βάλλεται από μικρό ύψος h οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές; Σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης διατηρείται σταθερή:

α) η κινητική ενέργεια του σώματος.

β) η μηχανική ενέργεια του σώματος.

γ) η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητάς του.

δ) η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητάς του.

ε) η ταχύτητά του.

10. Σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o. Ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι:

α) Ανάλογος του ύψους h

β) Ανεξάρτητος της τιμής του g

γ) Ανάλογος της υ_o

δ) Ανεξάρτητος της υ_o.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

11. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h πάνω απ' το οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ_0. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει στο έδαφος:

α) είναι ανάλογος του ύψους h.

β) είναι ανάλογος του μέτρου υ_0 της αρχικής ταχύτητας.

γ) είναι αντιστρόφως ανάλογος της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

δ) είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του ύψους h και αντιστρόφως ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

12. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h πάνω απ' το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα υ_0. Αν εκτελέσω το ίδιο πείραμα απ' το ίδιο ύψος h με μεγαλύτερη κατά μέτρο αρχική ταχύτητα υ_0 σε ένα άλλο πλανήτη που η επιτάχυνση της βαρύτητας g είναι μεγαλύτερη απ' αυτή στην επιφάνεια της Γης, τότε ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος:

α) αυξάνεται.

β) μειώνεται.

γ) μένει σταθερός.

δ) δεν μπορεί να συγκριθεί με τον αντίστοιχο του αρχικού πειράματος γιατί δεν ξέρουμε τις μεταβολές των υ_0 και g.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

13. Σώμα βάλλεται απ' τη θέση Ο οριζόντια από μικρό ύψος h πάνω απ' το οριζόντιο έδαφος τη στιγμή $t = 0$. Για τη μελέτη της κίνησης θεωρώ ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy με τον Ox οριζόντιο και τον Oy κατακόρυφο που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο της κίνησης. Να επιλέξετε ποιες από τις παρακάτω απαντήσεις είναι σωστές.

Τη χρονική στιγμή t_1 τα μεγέθη της κίνησης που εξαρτώνται απ' αυτή είναι:

α) το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητας υ_{1x}.

β) το μέτρο της κατακόρυφης ταχύτητας υ_{1y}.

γ) η οριζόντια μετατόπιση x_1 μέχρι τη στιγμή t_1.

δ) η κατακόρυφη μετατόπιση y_1 μέχρι τη στιγμή t_1.

ε) η επιτάχυνση της βαρύτητας.

14. Σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o. Το βεληνεκές, s, είναι:

α. Ανάλογο της υ_o

γ. Ανεξάρτητο της υ_o

β. Ανεξάρτητο του ύψους h

δ. Ανεξάρτητο του g.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

15. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h πάνω από το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Το βεληνεκές του σώματος:

α) είναι ανάλογο του ύψους h

β) είναι αντιστρόφως ανάλογο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

γ) είναι ανάλογο του μέτρου υ_0 της αρχικής ταχύτητας.

δ) εξαρτάται απ' τη φορά της αρχικής ταχύτητας υ_0.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

16. Μια πέτρα εκτοξεύεται οριζόντια από την ταράτσα μιας πολυκατοικίας με ταχύτητα μέτρου υ_o. Αν η ίδια πέτρα εκτοξευθεί με διπλάσιου μέτρου ταχύτητα πως θα μεταβληθεί ο χρόνος μέχρι την πρόσκρουση της με το έδαφος; (η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα)

α) θα διπλασιαστεί

β) θα υποδιπλασιαστεί

γ) θα τετραπλασιαστεί

δ) θα παραμείνει ίδιος

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

17. Σημειώστε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες από τις παρακάτω προτάσεις :

α) Σε μια οριζόντια βολή το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο

β) Στην οριζόντια βολή κοντά στο έδαφος ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι σταθερός

γ) Σε μια οριζόντια βολή η μέγιστη οριζόντια απόσταση (βεληνεκές) είναι ανάλογη του ύψους από το οποίο αφέθηκε το σώμα

18. Ένα σώμα εκτοξεύεται οριζόντια από μικρό ύψος από το έδαφος. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι η σωστή:

α) Το σώμα προσκρούει στο έδαφος κάθετα

β) Το μέτρο της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο

γ) Το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος αυξάνεται ανάλογα με το χρόνο
δ) Η επιτάχυνση του σώματος μεταβάλλεται ανάλογα με το χρόνο

19. Σώμα Κ αφήνεται να πέσει ελευθέρα από ύψος h από το έδαφος ενώ την ίδια χρονική στιγμή από το ίδιο ύψος εκτοξεύεται οριζόντια άλλο σώμα Λ με ταχύτητα μέτρου $υ_ο$.
α) Τα σώματα θα φτάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος
β) Το σώμα Κ θα φτάσει πιο γρήγορα στο έδαφος
γ) Το σώμα Κ φτάνοντας στο έδαφος θα έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το Λ
δ) Τα σώματα κάθε στιγμή βρίσκονται στο ίδιο ύψος από τη Γη.
Σημειώστε τις σωστές προτάσεις

20. Σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_ο$ και προσγειώνεται μετά από χρόνο t. Το μέτρο της ταχύτητας με την οποία προσγειώνεται στο έδαφος είναι:

α) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + gt}$ β) $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2}$ γ) $υ=υ_ο$ δ) υ=0

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση

21. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα μέτρου υ_0. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν αυτό φτάνει στο έδαφος εξαρτάται:
α) απ' το ύψος h.
β) απ' το μέτρο της υ_0.
γ) απ' την επιτάχυνση της βαρύτητας.
δ) απ' όλα τα παραπάνω.
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

22. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το οριζόντιο έδαφος αφήνουμε μια μικρή σφαίρα $Σ_1$ και ταυτόχρονα βάλλουμε από το ίδιο σημείο οριζόντια μια άλλη σφαίρα $Σ_2$ με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_ο$. Οι σφαίρες πέφτουν στο έδαφος:
α) Ταυτόχρονα.
β) Πρώτη πέφτει η $Σ_1$
γ) Πρώτη πέφτει η $Σ_2$
Ποια είναι η σωστή απάντηση

23. Από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το οριζόντιο έδαφος αφήνουμε μια μικρή σφαίρα $Σ_1$ και ταυτόχρονα βάλλουμε οριζόντια μια άλλη σφαίρα $Σ_2$ με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_ο$. Με μεγαλύτερου μέτρου ταχύτητα στο έδαφος φτάνει:
α) Η $Σ_1$
β) Η $Σ_2$
γ) Καμία από τις δύο.
Ποια είναι η σωστή απάντηση

24. Ένα σώμα εκτελεί οριζόντια βολή. Να χαρακτηρίσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες από τις παρακάτω προτάσεις. Αν το μέτρο της αρχικής οριζόντιας ταχύτητας $υ_ο$ αυξηθεί τότε θα αυξηθεί :
α) ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα μέχρι να φτάσει το έδαφος
β) η μέγιστη οριζόντια μετατόπιση (βεληνεκές) του σώματος
γ) το μέτρο της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας του σώματος

δ) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

25. Σώμα βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ_0 από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g, τότε κάθε χρονική στιγμή t το σώμα απέχει απ' το σημείο Ο:

α) $d = \upsilon_0 t$. β) $d = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}gt^2$. γ) $d = \sqrt{(\upsilon_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2}$. δ) $d = H - \frac{1}{2}gt^2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

26. Να χαρακτηρίσετε με Σ τις παρακάτω προτάσεις αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες. Από το ίδιο ύψος βάλλονται δυο σώματα με μάζας m και 2m και με την ίδια οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o.

α) το βαρύτερο σώμα θα φθάσει στο οριζόντιο έδαφος γρηγορότερα

β) τα δυο σώματα θα φθάσουν ταυτόχρονα στο έδαφος

γ) το ελαφρύτερο σώμα θα πάει μακρύτερα στη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα

δ) τα δυο σώματα φθάνουν στο οριζόντιο έδαφος με την ίδια μέγιστη οριζόντια μετατόπιση.

ε) το βαρύτερο σώμα θα φτάσει στο έδαφος με μεγαλύτερου μέτρου ταχύτητα.

27. Σώμα βάλλεται οριζόντια από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας στο οποίο η επιτάχυνση είναι g. Θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (xOy). Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λάθος;

α) Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας είναι συνεχώς ίση με υ_o

β) Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι ανάλογη του χρόνου πτώσης t.

γ) Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει κατεύθυνση εφαπτομένη της τροχιάς του σώματος.

δ) Η ταχύτητα αυξάνεται κατά μέτρο μόνο κατά το άξονα Oy.

28. Σώμα βάλλεται οριζόντια από σημείο Ο που βρίσκεται σε ύψος h με αρχική θετική ταχύτητα μέτρου υ_o μέσα στο πεδίο βαρύτητας στο οποίο η επιτάχυνση είναι g. Θεωρούμε ότι η κίνηση γίνεται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (xOy). Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λάθος

α) Η οριζόντια απομάκρυνση x είναι ανάλογη του χρόνου t.

β) Η κατακόρυφη απομάκρυνση y είναι ανάλογη του χρόνου t.

γ) Το βεληνεκές είναι ανάλογο της υ_o

δ) Η κατεύθυνση της ταχύτητα υ είναι συνεχώς σταθερή.

29. Αεροπλάνο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 σε μικρό ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος. Την $t_0 = 0$ που βρίσκεται στη θέση Ο, το αεροπλάνο αφήνει να πέσει μια βόμβα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές; Απ' τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι η βόμβα να φτάσει στο έδαφος κάθε στιγμή αυτή έχει με το αεροπλάνο

α) ίδια ταχύτητα.

β) ίδια οριζόντια ταχύτητα.

γ) ίδια επιτάχυνση.

δ) ίδια μετατόπιση απ' τη θέση Ο.

ε) ίδια οριζόντια μετατόπιση απ' τη θέση Ο.

30. Από κάποιο σημείο που απέχει μικρό ύψος από το έδαφος δυο σώματα Σ_1 και Σ_2. Το Σ_1 έχει μάζα m και εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_o, ενώ το Σ_2 έχει μάζα 2m και

εκτοξεύεται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $4υ_ο$. Αν η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;
α) Και τα δυο σώματα θα φθάσουν στο έδαφος στον ίδιο χρόνο
β) Τα δυο σώματα κάθε στιγμή βρίσκονται στο ίδιο ύψος.
γ) Το $Σ_1$ θα φθάσει στο έδαφος με μεγαλύτερη ταχύτητα γιατί έχει μικρότερη μάζα.
δ) Και τα δυο σώματα θα κινηθούν με την ίδια επιτάχυνση
ε) Στο $Σ_1$ ασκείται μικρότερη κατά μέτρο δύναμη στη διάρκεια της κίνησής του.

31. Σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_ο$ και προσγειώνεται μετά από χρόνο t. Το διάνυσμα της ταχύτητας με την οποία προσγειώνεται σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο έδαφος. Για τη γωνία θ, ισχύει ότι:
α) Είναι ορθή σε κάθε οριζόντια βολή.
β) Έχει τιμή ανεξάρτητη της αρχικής ταχύτητας $υ_0$.
γ) Δίνεται από τη σχέση: $εφθ = \frac{\sqrt{2gh}}{υ_0}$
δ) Αν είναι 45^o τότε ισχύει ότι, $υ_y=υ_x=υ_0$.
Επιλέξτε τις σωστές προτάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις να θεωρηθούν οι αντιστάσεις του αέρα αμελητέες.

32. Δυο σώματα βάλλονται οριζόντια από διαφορετικά ύψη h_1 και h_2 από θέσεις που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο και με διαφορετικές ταχύτητες μέτρου u_{0_1} και u_{0_2} αντίστοιχα. Το ύψος h_1 είναι διπλάσιο του ύψους h_2. Ποια από τις παρακάτω απαντήσεις είναι η σωστή: Ο λόγος των ταχυτήτων $\frac{u_{0_1}}{u_{0_2}}$ για να πέφτουν τα δυο σώματα στο ίδιο σημείο του εδάφους είναι :

α) 1 , β) 2 , γ) $\sqrt{2}$, δ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

33. Ένα σώμα μάζας m βάλλεται από ύψος h_1 με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0$ ενώ ένα δεύτερο σώμα ίδιας μάζας βάλλεται από ύψος h_2 με αρχική ταχύτητα μέτρου $2υ_0$. Για να έχουν τα δύο σώματα ίδιο βεληνεκές θα πρέπει ο λόγος των υψών $\frac{h_1}{h_2}$ να είναι:

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 2 , δ) 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

34. Δύο σώματα ίδιας μάζας βάλλονται από το ίδιο ύψος με αρχικές ταχύτητες μέτρων $υ_0$ και $2υ_0$ και φτάνουν στο έδαφος με βεληνεκές x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ο λόγος $\frac{x_1}{x_2}$ είναι:

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 2 , δ) 1

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

35. Ένα σώμα μάζας m βάλλεται από ύψος h_1 με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 ενώ ένα δεύτερο σώμα ίδιας μάζας βάλλεται από ύψος $h_2 = \frac{h_1}{4}$ με ίδια αρχική ταχύτητα. Αν t_1 ο χρόνος που χρειάζεται το πρώτο σώμα για να φτάσει στο έδαφος και t_2 ο αντίστοιχος χρόνος για το δεύτερο σώμα, τότε ο λόγος $\frac{t_1}{t_2}$ είναι :

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 2 , δ) 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

36. Ένα σώμα μάζας m βάλλεται από ύψος h με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 ενώ ένα δεύτερο σώμα διπλάσιας μάζας βάλλεται από το ίδιο ύψος με ίδια αρχική ταχύτητα. Τα δύο σώματα φτάνουν στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ο λόγος $\frac{x_1}{x_2}$ είναι:

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 2 , δ) 1

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

37. Ένα σώμα βάλλεται από ύψος h_1 με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 και φτάνει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση x_1. Το ίδιο σώμα βάλλεται από ύψος $h_2 = \frac{h_1}{2}$ με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 και φτάνει στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση x_2. Ο λόγος $\frac{x_1}{x_2}$ είναι:

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, γ) $\sqrt{2}$, δ) 2

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

38. Ένα σώμα μάζας m βάλλεται από ύψος h_1 με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 ενώ ένα δεύτερο σώμα ίδιας μάζας βάλλεται από ύψος $h_2 = \frac{h_1}{4}$ με αρχική ταχύτητα μέτρου $2\upsilon_0$. Τα δύο σώματα φτάνουν στο έδαφος σε οριζόντια απόσταση x_1 και x_2 αντίστοιχα. Ο λόγος $\frac{x_1}{x_2}$ είναι:

α) $\frac{1}{2}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 2 , δ) 1

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

39. Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 εκτοξεύονται οριζόντια με ταχύτητες υ_{01} και $\upsilon_{02} = 2\upsilon_{01}$ από ύψη h_1 και $h_2 = 4h_1$ αντίστοιχα απ' το οριζόντιο έδαφος. Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών υ_1, υ_2 που αυτές αποκτούν αμέσως πριν φτάσουν στο έδαφος συνδέονται απ' τη σχέση:

α) $\upsilon_2 = \upsilon_1$. β) $\upsilon_2 = 2\upsilon_1$. γ) $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}$. δ) $\upsilon_2 = 4\upsilon_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

40. Ένα σώμα μάζας m_1 βάλλεται από ύψος h_1 με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 ενώ ένα δεύτερο σώμα μάζας m_2 βάλλεται από ύψος h_2 με αρχική ταχύτητα μέτρου $2\upsilon_0$. Αν το βεληνεκές του πρώτου σώματος είναι διπλάσιο από το βεληνεκές του δεύτερου τότε ο λόγος των υψών $\frac{h_1}{h_2}$ είναι:

α) $\frac{1}{16}$, β) $\frac{1}{4}$, γ) 16 , δ) 4

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

41. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος απ' το οριζόντιο έδαφος και με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Όταν το σώμα φτάνει στο οριζόντιο έδαφος, η κινητική του ενέργεια έχει γίνει τριπλάσια της αρχικής κινητικής του ενέργειας. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητάς του με το οριζόντιο έδαφος τη στιγμή που φτάνει σ' αυτό τότε ισχύει:

α) $\varepsilon\varphi\theta = \sqrt{2}$. β) $\varepsilon\varphi\theta = 1$. γ) $\varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3}$. δ) $\varepsilon\varphi\theta = 2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

42. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Το σημείο βολής είναι το σημείο Ο. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος η κινητική του ενέργεια έχει αυξηθεί κατά 100% σε σχέση με την αρχική του.

Α. Το μέτρο της κατακόρυφης ταχύτητάς του όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι:

α) $\upsilon_{1y} = \frac{\upsilon_0}{2}$. β) $\upsilon_{1y} = 2\upsilon_0$. γ) $\upsilon_{1y} = \upsilon_0$. δ) $\upsilon_{1y} = 3\upsilon_0$.

Β. Αν το σώμα πέσει στο σημείο Κ του οριζόντιου εδάφους τότε η απόσταση ΚΟ είναι:

α) ΚΟ= $\sqrt{2}\,h$. β) ΚΟ= $2h$. γ) ΚΟ= $\sqrt{3}\,h$. δ) ΚΟ= $\sqrt{5}\,h$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτημα.

Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

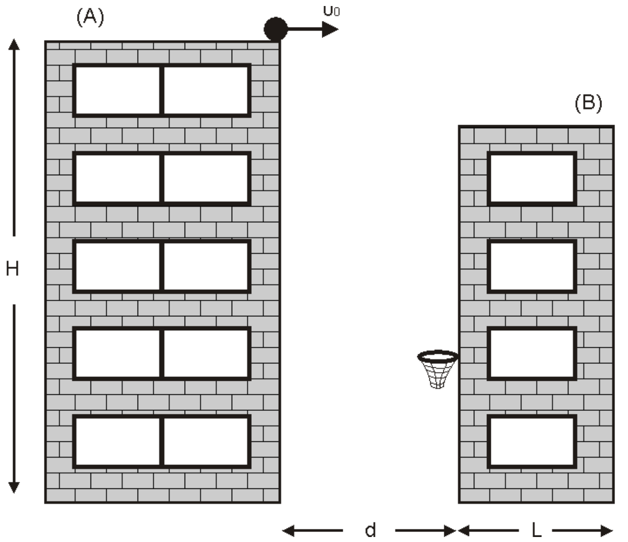
43. Σώμα βάλλεται οριζόντια από μικρό ύψος h απ' το οριζόντιο έδαφος με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Αν το βεληνεκές που διανύει το σώμα διπλάσιο του ύψους h τότε η ταχύτητα του σώματος όταν αυτό φτάνει στο έδαφος σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ με:

α) $\theta = 90^0$. β) $\theta = 45^0$. γ) $\theta = 60^0$. δ) $\theta = 30^0$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

44. Δυο ψηλά κτήρια (Α) και (Β) απέχουν απόσταση d=20m μεταξύ τους. Το κτήριο (Α) έχει ύψος H=125m, ενώ το κτήριο (Β) έχει ύψος h=80m και πλάτος L=12m. Από το ακραίο σημείο της ταράτσας του κτηρίου (Α) εκτοξεύεται μια μπάλα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0, με σκοπό να φτάσει στην ταράτσα του κτηρίου (Β), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

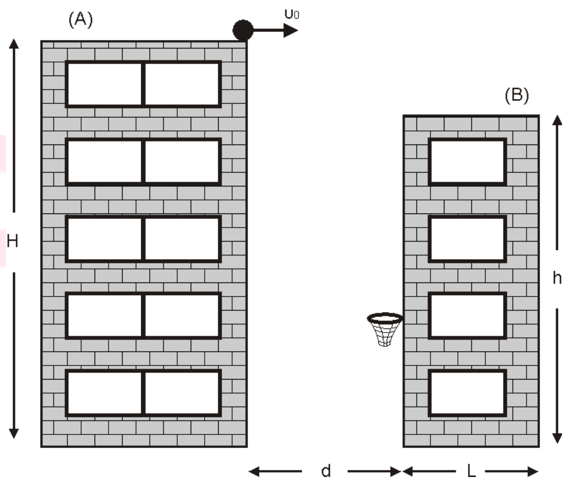


Η ελάχιστη κατά μέτρο αρχική ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στην μπάλα ώστε να πέσει στην ταράτσα του κτηρίου (Β) είναι:

α) $5\,m/s$, Σ β) $4\,m/s$, γ) $6\,m/s$, δ) $7\,m/s$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε

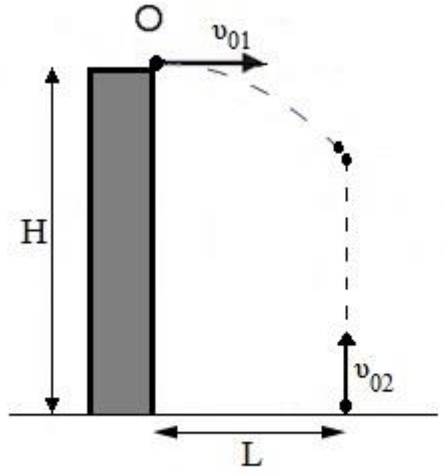
45. Δυο ψηλά κτήρια (Α) και (Β) απέχουν απόσταση d=10m μεταξύ τους. Το κτήριο (Α) έχει ύψος H=80m, ενώ το κτήριο (Β) έχει ύψος h. Από το ακραίο σημείο της ταράτσας του κτηρίου (Α) εκτοξεύεται μια μπάλα με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Στην πλευρά του (Β) κτηρίου, στο ύψος του 5ου ορόφου, ο οποίος βρίσκεται 60m πάνω από το έδαφος, έχει τοποθετηθεί ένα καλάθι του μπάσκετ.
Το μέτρο της οριζόντιας ταχύτητα υ_0 που πρέπει να εκτοξεύσουμε τη μπάλα από την άκρη της ταράτσας του κτηρίου (Α) ώστε να πετύχουμε το καλάθι είναι:



α) $5\,m/s$, β) $8\,m/s$, γ) $7\,m/s$, δ) $3\,m/s$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

46. Από την άκρη Ο της ταράτσας μιας πολυκατοικίας εκτοξεύεται την $t_0 = 0$ με ταχύτητα μέτρου υ_{01} μικρό σώμα. Το ύψος της πολυκατοικίας είναι h. Στη θέση Κ του οριζοντίου εδάφους που έχει οριζόντια απόσταση $L = \frac{H}{3}$ απ' την πολυκατοικία την ίδια στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύεται άλλο μικρό σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_{02} όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



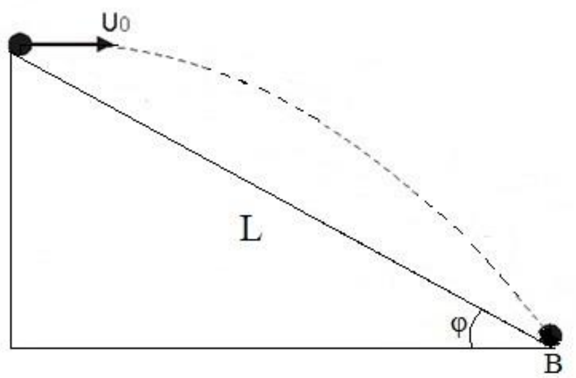
Για να συγκρουστούν τα δύο σώματα σε κάποια θέση της κίνησής τους, για τα μέτρα των ταχυτήτων τους πρέπει να ισχύει:

α) $\upsilon_{01} = \frac{\upsilon_{02}}{2}$. β) $\upsilon_{01} = 2\upsilon_{02}$. γ) $\upsilon_{01} = \frac{\upsilon_{02}}{3}$. δ) $\upsilon_{01} = 3\upsilon_{02}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

47. Σφαίρα μικρών διαστάσεων βάλλεται την $t = 0$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0 απ' την κορυφή Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi = 30^0$ και μήκους L όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g, για να χτυπήσει η σφαίρα στη βάση Β του κεκλιμένου επιπέδου πρέπει το μέτρο υ_0 να είναι:

α) $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{3gL}{4}}$. β) $\upsilon_0 = \sqrt{3gL}$. γ) $\upsilon_0 = \sqrt{2gL}$. δ) $\upsilon_0 = \sqrt{gL}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

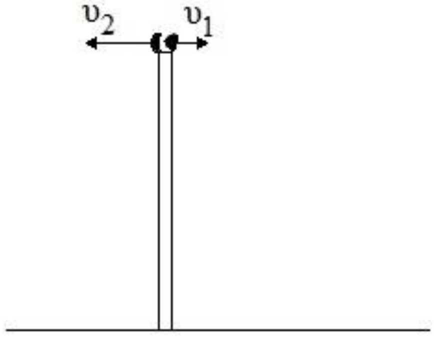
Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

48. Δυο σώματα (1) και (2) εκτοξεύονται οριζόντια τη χρονική στιγμή t=0 από το ίδιο ύψος h πάνω από το έδαφος με ταχύτητες αντίθετης φοράς και μέτρου $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα που ικανοποιούν τη σχέση $υ_1=4υ_2$. Αν s_2 είναι η οριζόντια απόσταση που έχει διανύσει το σώμα (2) όταν φτάσει στο έδαφος τότε τα σημεία πτώσης των δυο σωμάτων στο έδαφος απέχουν μεταξύ τους απόσταση

α) $4s_2$, β) $8s_2$, γ) $5s_2$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

49. Βόμβα μάζας m αρχικά ισορροπεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου στύλου ύψους h. Την $t = 0$ η βόμβα εκρήγνυται σε δύο κομμάτια με μάζες $m_1 = \frac{3m}{4}$ και $m_2 = \frac{m}{4}$ που αμέσως μετά την έκρηξη έχουν οριζόντιες ταχύτητες μέτρων υ_1 και $\upsilon_2 = 3\upsilon_1$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



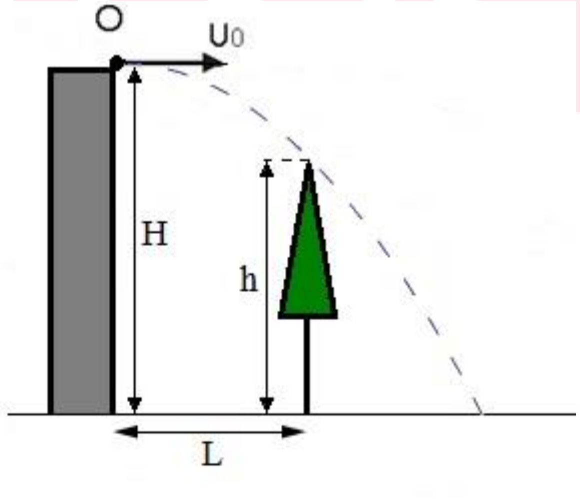
36-

Αν το βεληνεκές του κομματιού μάζας m_2 είναι s_2 τότε η οριζόντια απόσταση s που θα έχουν διανύσει τα δύο κομμάτια όταν φτάνουν στο έδαφος θα είναι:

α) $s = 2s_2$. β) $s = 3s_2$. γ) $s = 4s_2$. δ) $s = \frac{7}{4}s_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

50. Από το άκρο O μιας πολυκατοικίας ύψους $H = 10\ m$ εκτοξεύεται την $t = 0$ μικρή σφαίρα. Η σφαίρα περνά «ξυστά» απ' την κορυφή ενός κυπαρισσιού ύψους $h = 5\ m$ και συνεχίζοντας την κίνησή της φτάνει στο έδαφος. Η οριζόντια απόσταση της βάσης του κυπαρισσιού απ' το δεξί άκρο της βάσης της πολυκατοικίας είναι $L = 5\ m$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η εξίσωση της τροχιάς της κίνησης της σφαίρας είναι:

α) $y = 5x^2$ (S.I.).

β) $y = 0,2x^2$ (S.I.).

γ) $y = 2x^2$ (S.I.).

δ) $y = 0,5x^2$ (S.I.).

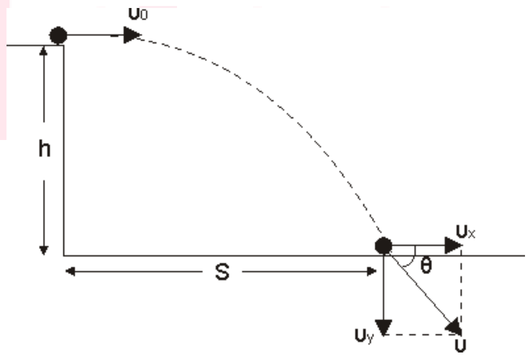
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

1) $\sqrt{\frac{2h}{g}}$, Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, ελεύθερη πτώση, σταθερή, μηδέν, μεγαλύτερη 2)β 3)γ 4)δ 5)γ 6)1→στ,2→α,3→β,4→γ,5→δ,6→ε, 7)γ,ε 8)α 9)β,δ 10)δ 11)δ 12)β 13)β,γ,δ 14)α 15)γ 16) δ 17) Λ Σ Λ 18) γ 19) Σ Λ Λ Σ 20) β 21)δ 22) α 23) β 24) Λ Σ Λ Σ 25)γ 26) Λ Σ Λ Σ 27) Σ Σ Λ Σ 28) Σ Λ Σ Λ 29)β,ε 30) Σ Σ Λ Σ Σ 31) Λ Λ Σ Σ 32) δ 33) δ 34) α 35) γ 36) δ 37) β 38) δ 39)β 40)γ 41)α 42)Α.γ,Β.δ 43)β 44) δ 45)α 46)γ 47)α 48)γ 49)γ 50)β

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



1. x’x: $\upsilon_x=\upsilon_0=$σταθ., $x=\upsilon_0 t$ (Ευθύγραμμη Ομαλή κίνηση)

   y’y: $\upsilon_y=gt$, $y=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ (Ελεύθερη πτώση)

   Όταν y=h τότε $t=t_k$ (χρόνος κίνησης)

   $$h=\frac{1}{2}g\cdot t_k^2 \Rightarrow t_k^2=\frac{2h}{g}\Rightarrow t_k=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

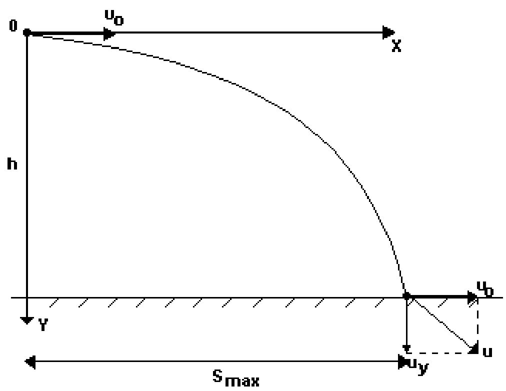
2. Όχι , ο χρόνος πτώσης της σφαίρας εξαρτάται μόνο από το ύψος από το οποίο αφήνεται.
3. Έχει αρχική οριζόντια ταχύτητα υ_o όση του αεροπλάνου από το οποίο αφήνεται. Άρα εκτελεί οριζόντια βολή.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

1. Α. Η κίνηση είναι ελεύθερη πτώση οπότε:

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g=\frac{2h}{t^2}\Rightarrow g=\frac{2\cdot 7,2}{9}m/s^2 \Rightarrow g=1,6m/s^2$$

Β. Τώρα έχουμε οριζόντια βολή άρα :



(i) Από την κατακόρυφη κίνηση : $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3s$

(ii) $S_{\max} = ut = 12\frac{m}{s} \cdot 3s \Rightarrow S_{\max} = 36m$

(α) Στον οριζόντιο άξονα : $\upsilon_x = \upsilon_o = 150 m/s$,

$S = \upsilon_x t = 150t$

Στον κατακόρυφο άξονα: $u_y = gt$, $y = \frac{1}{2} g t^2$ ενώ $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ (β)

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2} = 10 m / s^2$

(γ) $S = u_x t = 150 \cdot 10 = 1500m$