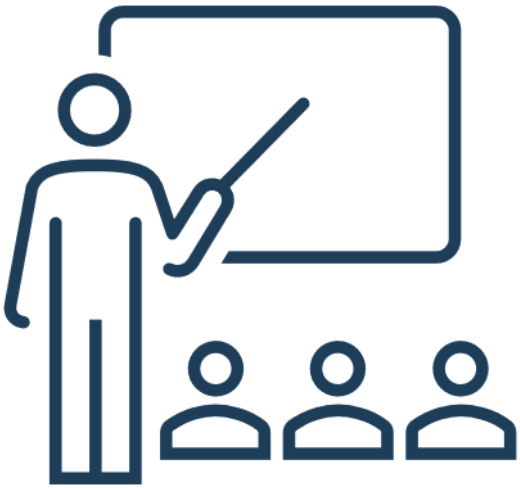
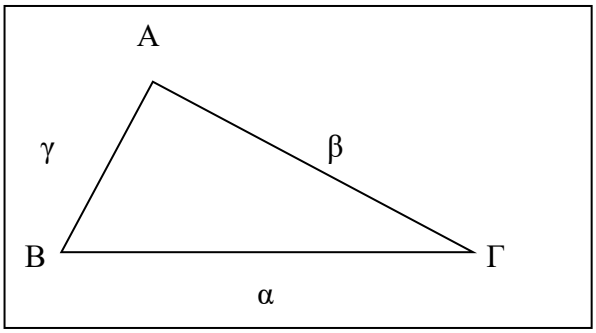
Κεφάλαιο 3 : Τρίγωνα

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

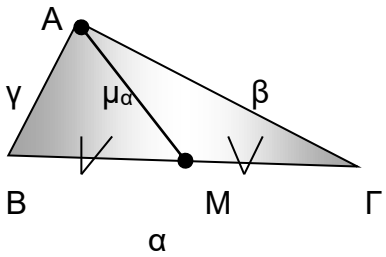


Κύρια Στοιχεία Τριγώνου

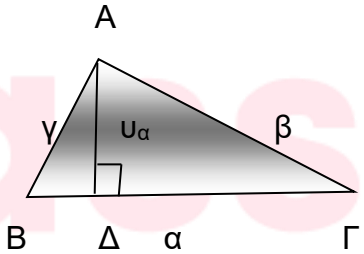
- **Είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.**



Δευτερεύοντα Στοιχεία Τρίγωνου



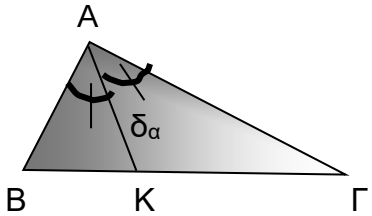
- ***Διάμεσος*** λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β, γ συμβολίζονται με μ_α , μ_β και μ_γ αντίστοιχα.



- ***Ύψος*** λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται **κάθετα** από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

  Τα ύψη που καταλήγουν στις πλευρές α, β, γ συμβολίζονται με υ_α υ_β και υ_γ αντίστοιχα .

  Στο διπλανό σχήμα και για το ύψος ΑΔ το Δ λέγεται **προβολή** του Α στην ευθεία ΒΓ ή **ίχνος** της καθέτου στην ευθεία ΒΓ.



- ***Διχοτόμος*** μιας γωνίας τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.

  Οι διχοτόμοι των γωνιών Α, Β, Γ συμβολίζονται με δ_α , δ_β και δ_γ αντίστοιχα.

Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Ένα τρίγωνο λέγεται:

- **Σκαληνό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.
- **Ισοσκελές,** όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
  Σε ένα ισοσκελες τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται βάση και το Α λέγεται κορυφή του.
- **Ισόπλευρο,** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες

Ένα τρίγωνο λέγεται :

- **Οξυγώνιο**, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **Αμλυγώνιο,** όταν έχει μια γωνία αμβλεία.
- **Ορθογώνιο,** όταν έχει μια γωνία ορθή. Σε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι απο την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες λέγονται **κάθετες**.

Ισότητα τρίγωνων

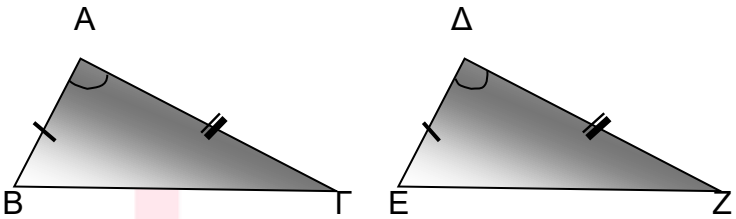
Ορισμός

Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες του ίσες μία προς μία.

Κριτήρια ισότητας τρίγωνων

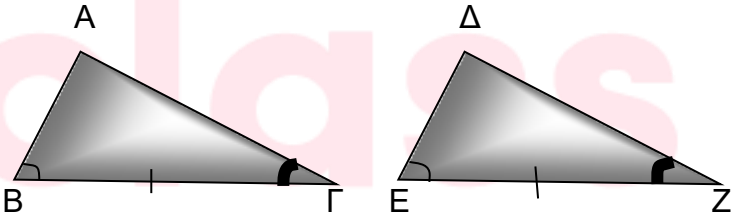
Θεώρημα (1ο κριτήριο ισότητας τρίγωνων. Π-Γ-Π)

Αν δυο πλευρές ενός τρίγωνου είναι ίσες μία προς μία με δυο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα



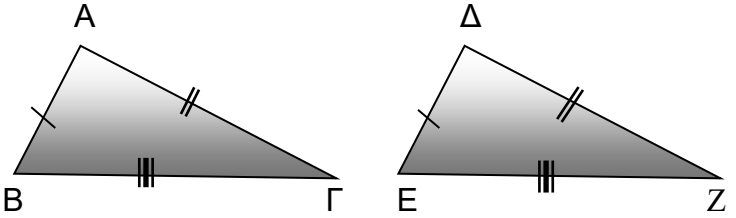
Θεώρημα (2ο κριτήριο ισότητας τρίγωνων. Γ-Π-Γ)

Αν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θεώρημα (3ο κριτήριο ισότητας τρίγωνων. Π-Π-Π)

Αν οι πλευρές ενός τρίγωνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



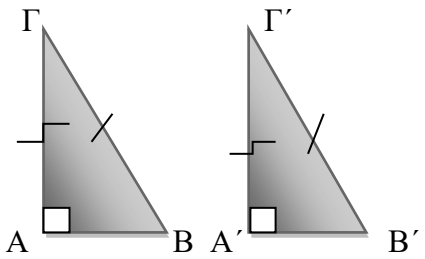
Σχόλιο

Όταν δυο τρίγωνα είναι ίσα (λόγω κάποιου κριτηρίου) τότε έχουν ίσα και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία τους , συγκεκριμένα απέναντι απο τις ίσες γωνίες βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες πλευρές και αντίστροφα.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τρίγωνων

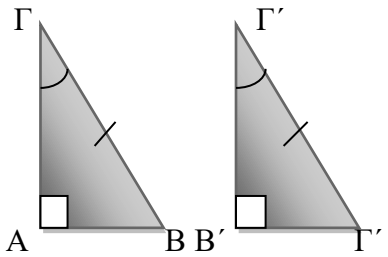
Τα κριτήρια οθογωνίων τριγώνων συνοψίζονται στα παρακάτω:

1ο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων



Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δυο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα

2ο κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τρίγωνων

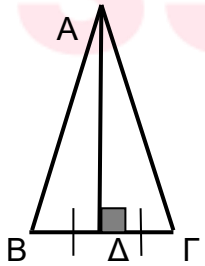


Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτήν οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

(**Αργότερα**, όπως θα αποδείξουμε θα μας φτάνει μια οποιαδήποτε οξεία γωνία)

gotoclass

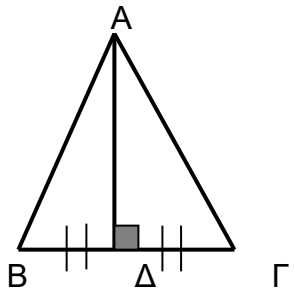
Θεωρήματα στα ισοσκελή τρίγωνα



Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές, τότε:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του είναι ύψος και διάμεσος
- Η διάμεσος που άγεται από την κορυφή του είναι ύψος και διχοτόμος
- Το ύψος που άγεται από την κορυφή του είναι διάμεσος και διχοτόμος

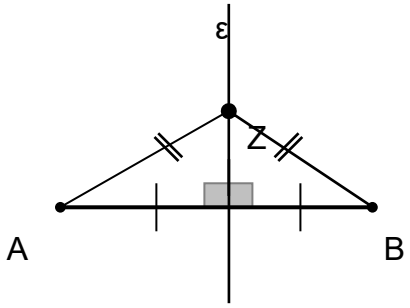
Θεωρήματα στα ισόπλευρα τρίγωνα



Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε

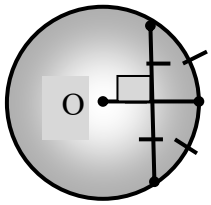
- Οι γωνίες του είναι ίσες
- Η διχοτόμος, η διάμεσος και το ύψος που αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε πλευρά του ταυτίζονται.

Θεωρήματα στη μεσοκάθετο



- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος απέχει εξίσου από τα άκρα του και αντίστροφα
  κάθε σημείο που απέχει εξίσου από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

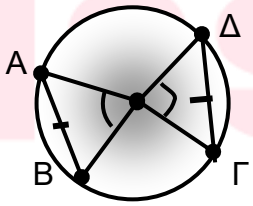
Απόστημα Χορδής



- Το κάθετο τμήμα από το κέντρο προς τη χορδή ονομάζεται **απόστημα** της χορδής.

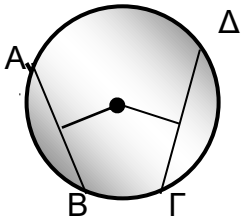
- Το **απόστημα** της χορδής διέρχεται από το **μέσο της χορδής και του αντιστοίχου τόξου.**

Θεωρήματα στον κύκλο



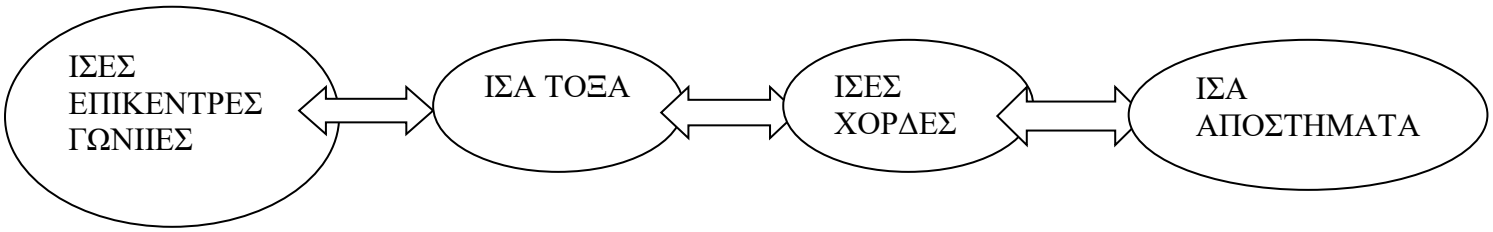
- Σε **ίσες επίκεντρες γωνίες** ενός κύκλου (ή ίσων κύκλων) αντιστοιχούν **ίσα τόξα** και **αντίστροφα.**

- Σε **ίσα τόξα** ενός κύκλου (ή ίσων κύκλων) αντιστοιχούν **ίσες χορδές** και **αντίστροφα** .

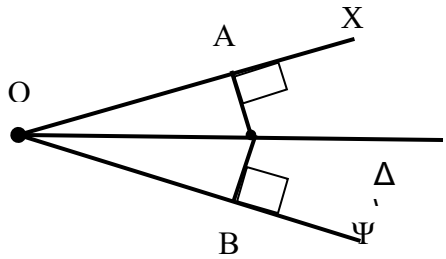


- Σε **ίσες χορδές** ενός κύκλου ή ίσων κύκλων αντιστοιχούν **ίσα αποστήματα** και **αντιστρόφως.**

Ανακεφαλαιώνοντας τα θεωρήματα του κύκλου



Θεωρήματα στη διχοτόμο



- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας απέχει εξίσου από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Γεωμετρικός τόπος

Λέγεται το σχήμα του οποίου τα σημεία και μόνο αυτά έχουν μια κοινή (χαρακτηριστική) ιδιότητα.

Παραδείγματα Βασικών Γεωμετρικών Τόπων

1) **Ο κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ** είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που τα σημεία του απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

2) **Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος** είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που τα σημεία του ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

3) **Η διχοτόμος μιας γωνίας** είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που τα σημεία του ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

4) **Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων ευθειών** είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που τα σημεία του ισαπέχουν από τις παράλληλες ευθείες.

Ανακεφαλαιώνοντας τα Κριτήρια απόδειξης Ισοσκελούς – Ισόπλευρου τρίγωνου

- **Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν ισχύει ένα από τα εξής:**

1. Δυο πλευρές ίσες.(ορισμός)
2. Δυο γωνίες ίσες.
3. Αν δύο από τα διάμεσος, διχοτόμος και ύψος που αντιστοιχούν σε μια πλευρά του ταυτίζονται.

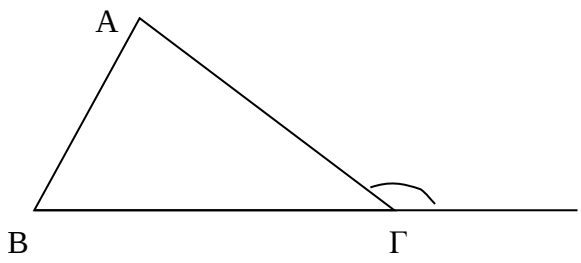
- **Ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο αν ισχύει ένα από τα εξής:**

1. Τρεις πλευρές ίσες.(ορισμός)
2. Τρεις γωνίες ίσες.

Ανισωτικές σχέσεις για τις γωνίες – πλευρές τριγώνων

- **Θεώρημα 1ο**

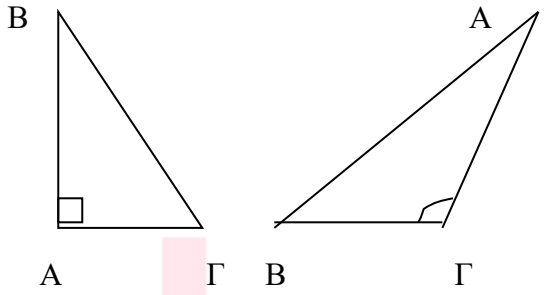
  Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη καθεμίας των απέναντι εσωτερικών γωνιών.



Π.χ. $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} > \hat{A}$ **και** $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$

- **Πόρισματα**

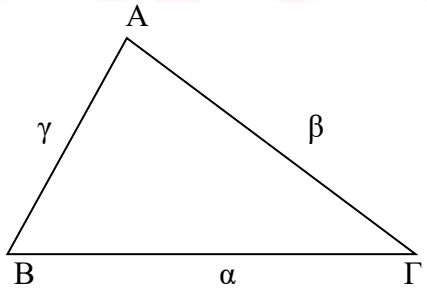
  1. Κάθε τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μια αμβλεία ή μια ορθή γωνία.



  2. Το άθροισμα δυο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180ο.

- **Θεώρημα 2ο**

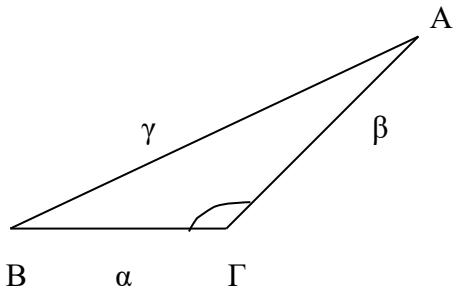
  Σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.



Π.χ. $\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}$

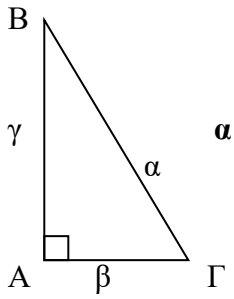
- **Πόρισματα**

1. Η μεγαλύτερη πλευρά ενός αμβλυγωνίου τρίγωνου είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία του.



γ > α και γ > β

2. Η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η υποτείνουσα.

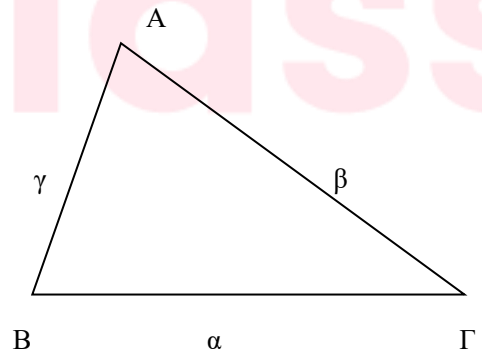


α > β και α > γ

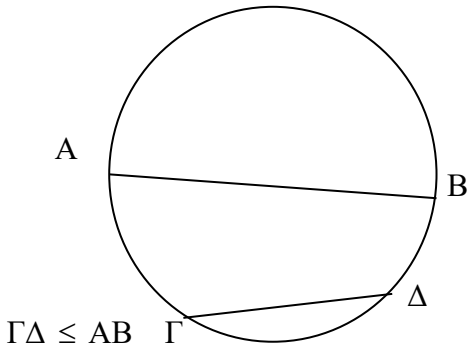
- **Θεώρημα 3ο (τριγωνική ανισότητα)**
  Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφορά τους.

  Π.χ. $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$

  (Παρόμοια σχέση ισχύει και για τις άλλες πλευρές)

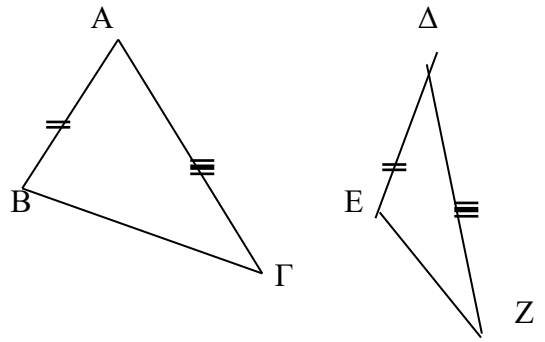


- **Πόρισμα**
  Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.



- **Θεώρημα 4ο**

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε οι τρίτες πλευρές τους είναι άνισες, αν και μόνο αν οι απέναντι σε αυτές γωνίες είναι ομοίως άνισες.



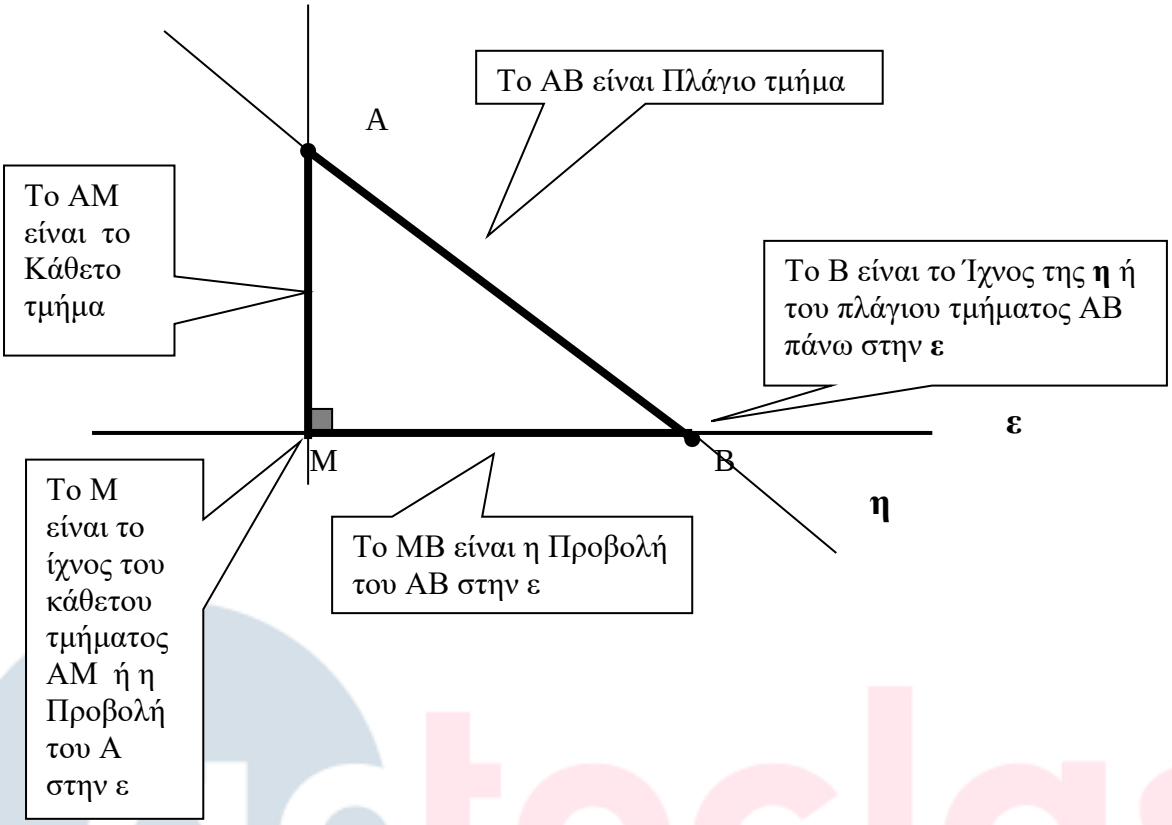
Αν ΑΒ = ΔΕ και ΑΓ = ΔΕ τότε

$$\text{ΒΓ} > \text{ΕΖ} \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{\Delta}$$

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω ανισοτικά θεωρήματα

Για ανισότητα γωνιών		**Για ανισότητα πλευρών**	
Σε ένα τρίγωνο	η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη κάθε απέναντι εσωτερικής,	Σε ένα τρίγωνο	απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται όμοια άνισες πλευρές
	η αμβλεία ή η ορθή γωνία είναι μοναδική και είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου,		Απέναντι από την αμβλεία γωνία βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου
	απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες.		Η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου
			Ισχύει η τριγωνική ανισότητα, Π.χ. $\lvert\beta-\gamma\rvert < \alpha < \beta+\gamma$
Σε δύο τρίγωνα	Που έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις τρίτες πλευρές τους άνισες, τότε οι απέναντι γωνίες είναι όμοια άνισες.	Σε δύο τρίγωνα	Που έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες τους άνισες, τότε οι απέναντι πλευρές είναι όμοια άνισες.

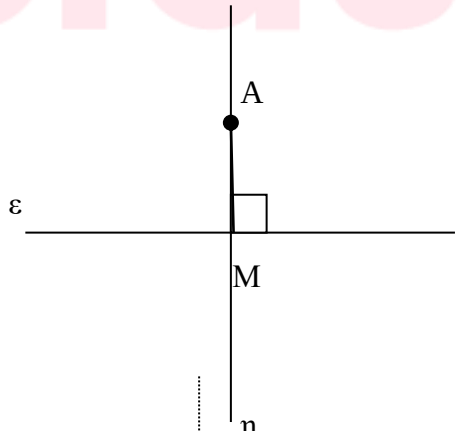
Ίχνος και προβολή πλάγιου τμήματος



Θεωρήματα στις κάθετες και πλάγιες ευθείες

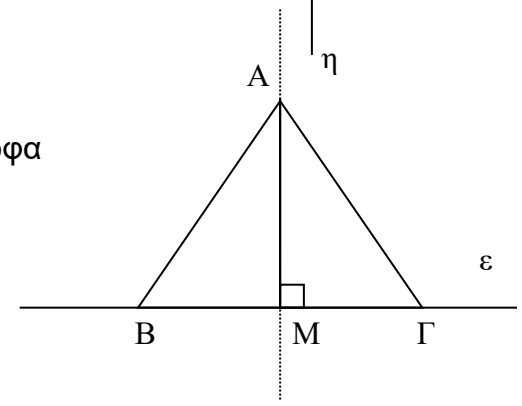
- **Θεώρημα 1ο**

Από τυχαίο σημείο ευθείας μπορούμε να φέρουμε κάθετη προς την ευθεία. Η κάθετη αυτή είναι μοναδική.



- **Θεώρημα 2ο**

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα



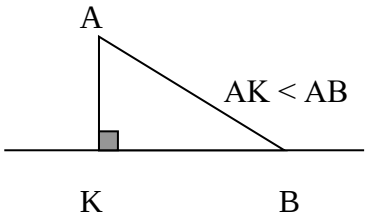
ΜΒ = ΜΓ ⇔ ΑΒ = ΑΓ

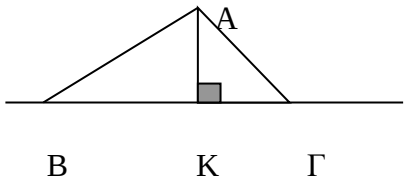
- **Θεώρημα 3ο**

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα τότε:

α) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

β) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.





ΑΓ < ΑΒ ⇔ ΚΓ < ΚΒ

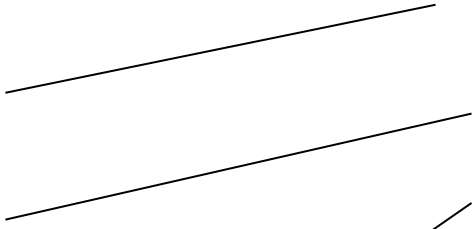
Κριτήριο Ύπαρξης Τριγώνου

- Τρία τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει για ένα από τα τμήματα αυτά η τριγωνική ανισότητα π.χ. **| β – γ | < α < β + γ**
- Αν η πλευρά α είναι η μεγαλύτερη τότε αρκεί να δείξουμε ότι: **α < β + γ.**

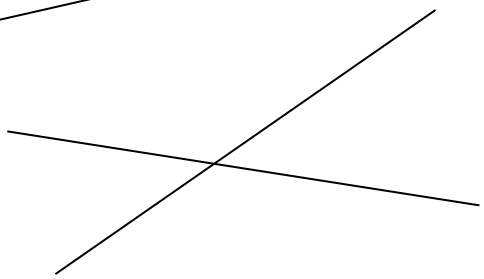
Σχετική θέση δύο ευθειών

Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου μπορεί να είναι:

α) **Παράλληλες,** δηλαδή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.



β) **Να τέμνονται**, δηλαδή να έχουν μοναδικό σημείο



γ) **Να ταυτίζονται**, δηλαδή να έχουν άπειρα κοινά σημεία.

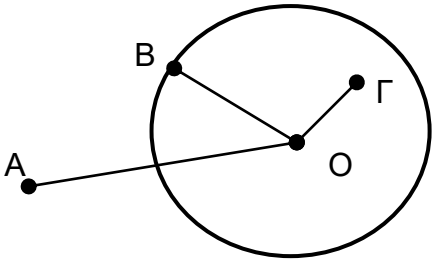
Σχετική θέση σημείου και κύκλου

Έστω κύκλος (Ο,ρ) και τα σημεία Α, Β, Γ , τότε:

α) Το σημείο Α είναι **εξωτερικό σημείο** του κύκλου
όταν ΟΑ > ρ.

β) Το σημείο Β είναι **σημείο του κύκλου**
όταν ΟΒ = ρ.

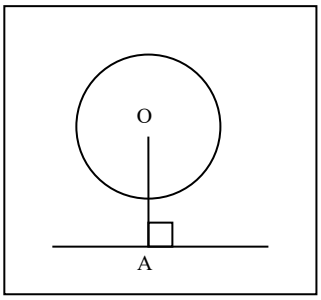
γ) Το σημείο Γ είναι **εσωτερικό σημείο του κύκλου**
όταν ΟΓ < ρ.



Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

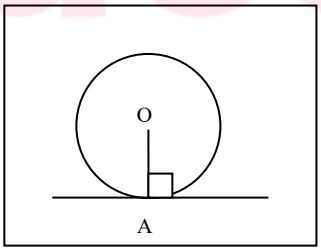
1. **Η ευθεία ε και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία** αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα $d(O,\varepsilon) > R$.

   ◆ Η ευθεία λέγεται **εξωτερική** του κύκλου.



2. **Η ευθεία και ο κύκλος έχουν μόνο ένα κοινό σημείο** αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα $d(O,\varepsilon) = R$.

   ◆ Η ευθεία λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου και το σημείο Α **σημείο επαφής**

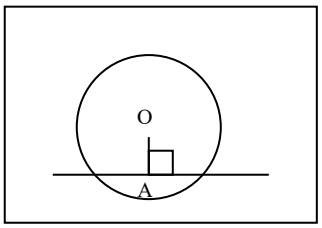


Παρατήρηση.

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.

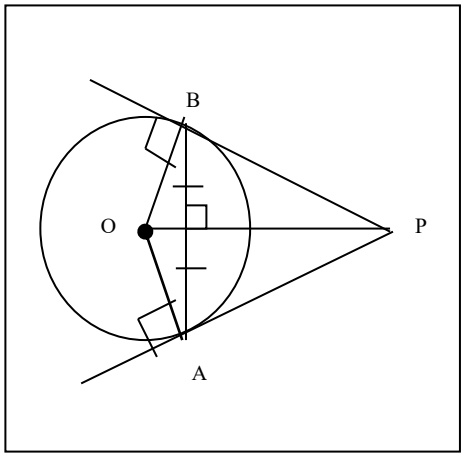
3. **Η ευθεία και ο κύκλος έχουν δυο κοινά σημεία** αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι μικρότερη από την ακτίνα $d(\mathrm{O},\varepsilon) < R$.

   ◆ Η ευθεία λέγεται **τέμνουσα** του κύκλου.



Θεώρημα

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου (O, R), που άγονται από σημείο P εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους $PA = PB$.



Πόρισμα

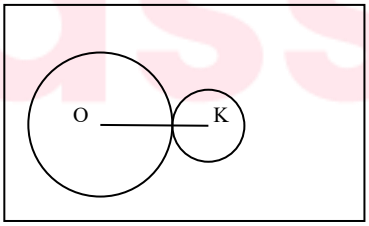
Η διακεντρική ευθεία PO είναι:

α) μεσοκάθετος της χορδής AB.
β) διχοτόμος των γωνιών $A\hat{O}B, A\hat{P}B$

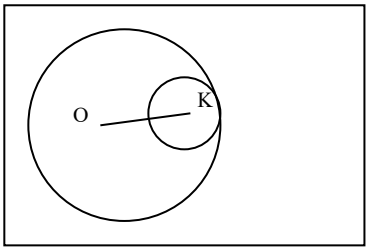
Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

Θεωρούμε δυο κύκλους $(O, R), (K, \rho)$. Το ευθύγραμμο τμήμα $OK = \delta$ με άκρα τα κέντρα των κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δυο κύκλων.

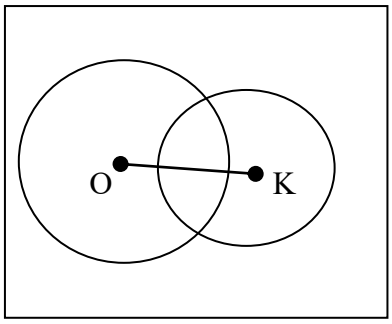
α) **Οι κύκλοι εφάπτομαι εξωτερικά** $\Leftrightarrow$ $OK = R + \rho$.



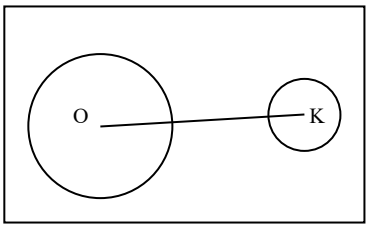
β) **Οι κύκλοι εφάπτομαι εσωτερικά** $\Leftrightarrow$ $OK = |R - \rho|$.



γ) **Οι κύκλοι τέμνονται** $\Leftrightarrow$ $|R - \rho| < OK < R + \rho$.

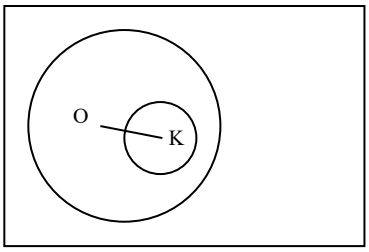


δ) **Καθένας από τους κύκλους είναι εξωτερικός του αλλού** $\Leftrightarrow$ $OK > R + \rho$



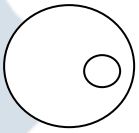
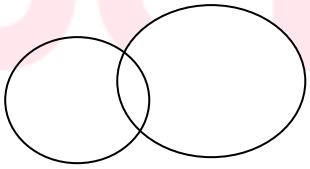
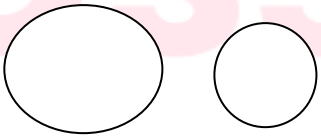
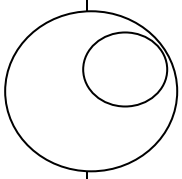
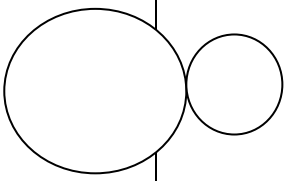
ε) **Ο κύκλος** (K, ρ) **είναι εσωτερικός του** $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{R})$

$\Leftrightarrow$ $OK < |R - \rho|$



<u>Ανακεφαλαιώνοντας τις παραπάνω σχετικές θέσεις</u>

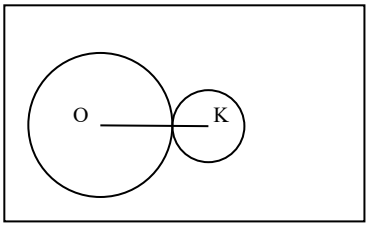
Έστω οι κύκλοι (K, ρ) και $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{R})$

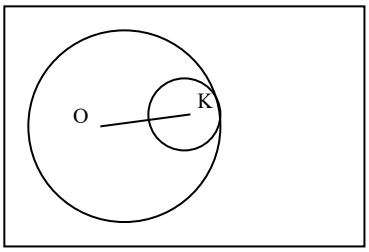
ΚΛ	0	|R-ρ|	R+ρ
ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ	 Ο ένας κύκλος εσωτερικός του άλλου	 Οι κύκλοι τέμνονται	 Ο ένας κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου
		 Οι κύκλοι εσωτερικά Εφάπτονται	 Οι κύκλοι εξωτερικά Εφάπτονται

Παρατηρήσεις

1. Για τους Εφαπτόμενους κύκλους

Η προέκταση της διακέντρου (και στις δύο περιπτώσεις) διέρχεται από το σημείο επαφής.

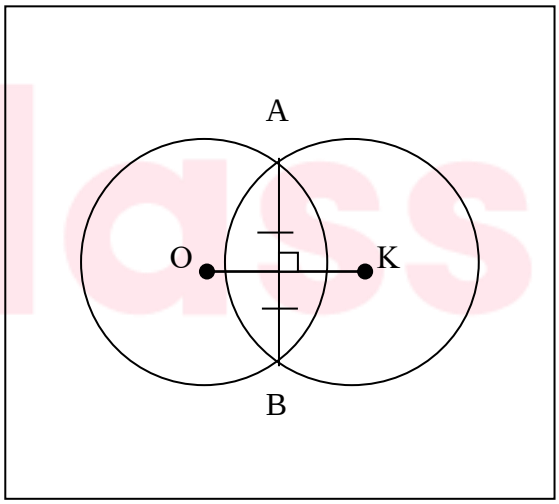




2. Για τους Τεμνόμενους κύκλους

α) Η ευθεία ΟΚ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ.

β) Αν οι κύκλοι είναι ίσοι τότε και η ευθεία ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΟΚ.



Χρήσιμες Βοηθητικές ευθείες

Ανακεφαλαιώνοντας όσα μάθαμε στο κεφάλαιο αυτό μπορούμε να θυμόμαστε ότι, **αν σε μια άσκηση δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα**, τότε:

α) Αν έχουμε **τρίγωνο και μια διάμεσό του**, μπορούμε να **την προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα.**

β) Αν έχουμε **διχοτόμο γωνίας και από σημείο της έχουμε τη μια απόσταση του προς τη μια πλευρά** τότε φέρνουμε και **την απόσταση του σημείου αυτού προς την άλλη ευθεία.**

γ)Αν έχουμε **κύκλο και την εφαπτομένη του**, μπορούμε να φέρουμε **την ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής** της εφαπτομένης.

δ) Αν έχουμε **κύκλο και ένα εξωτερικό του σημείο**, μπορούμε να φέρουμε τη **διακεντρική ευθεία** που ενώνει το εξωτερικό σημείο με το κέντρο του κύκλου.

ε) Αν έχουμε **δυο κύκλους** (τεμνόμενους ή εφαπτόμενους), μπορούμε να φέρουμε τη **διάκεντρο** που ενώνει τα κέντρα δυο κύκλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) .Αν Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Μ το μέσο του ΒΓ να δείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ κατά ίσα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΓΔ β) ΒΔ = ΓΕ γ) $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ και πάνω σε αυτή παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ. Δείξτε ότι:
α) ΒΕ=ΓΕ , ΒΖ=ΓΖ
β) τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΓΕΖ είναι ίσα.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις της βάσης του ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ ώστε ΒΕ=ΓΖ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ ώστε ΑΕ=ΑΖ. Αν Μ μέσο του ΒΓ δείξτε ότι ΕΜ=ΖΜ.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά ίσα τμήματα ΓΕ και ΒΔ. Επίσης προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα κατά τμήματα ΒΖ και ΓΗ ώστε ΓΗ=ΒΖ. Αποδείξτε ότι:
α) ΔΖ=ΕΗ
β) Τα τρίγωνα ΔΖΑ και ΕΗΑ είναι ίσα.

8. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Μ, Ν και Ρ αντίστοιχα ώστε ΑΜ=ΒΝ=ΓΡ. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΜΝΡ είναι ισόπλευρο.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με την ΑΔ διχοτόμο. Αποδείξτε ότι κάθε σημείο Κ που ανήκει στην διχοτόμο ΑΔ ισαπέχει από τα άκρα της βάσης ΒΓ.

10. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσες.

11. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης είναι ίσες.

12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και οι διάμεσοί του ΒΜ και ΓΝ.
α) Αποδείξτε ότι ΒΜ=ΓΝ.
β) Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά ίσα τμήματα ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΓΝΕ είναι ίσα.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην ΑΓ σημείο Ε ώστε ΒΔ=ΕΓ. Αν Μ είναι το μέσο της ΔΕ να δείξετε ότι:
α) Η ΑΜ διχοτομεί την γωνία $B\hat{A}\Gamma$
β) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

14. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Β στις Ox και Oy αντίστοιχα ώστε ΟΑ=ΟΒ. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΟΔ και πάνω σε αυτή παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ. Αν οι ΑΜ και ΒΜ τέμνουν τις Oy και Ox στα σημεία Α' και Β' αντίστοιχα να δείξετε ότι:
α) ΜΑ=ΜΒ
β) ΑΑ'=ΒΒ'.

15. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α, Β στην Ox και τα σημεία Γ,Δ στην Oy ώστε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ. Αν Ε είναι η τομή των ΑΔ και ΒΓ , να δείξετε ότι: ΕΒ=ΕΔ.

16. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.

17. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} > 90^0$ Φέρνουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Δείξτε ότι ΒΔ=ΓΕ.

18. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) τα σημεία Κ , Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε $KM \perp B\Gamma$ και $\Lambda N \perp B\Gamma$, να δείξετε ότι ΚΝ=ΜΛ.

19. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ισχύει ότι: $\beta = \beta', \gamma = \gamma', \mu_\beta = \mu_{\beta'}$, Να δείξετε ότι είναι ίσα.

20. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ισχύει ότι $\alpha = \alpha', \hat{B} = \hat{B}', \delta_\beta = \delta_{\beta'}$ Να δείξετε ότι είναι ίσα.

21. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄με $\alpha = \alpha', \upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}, \upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$ Δείτε ότι:
α) $\hat{B} = \hat{B}'$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

22. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Δείξτε ότι οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου.

23. Αποδείξτε ότι το μέσο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τις κάθετες πλευρές του.

24. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις της βάσης του ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε, Ζ ώστε ΒΕ=ΓΖ. Δείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.
β) Τα σημεία Ε, Ζ ισαπέχουν από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

25. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ=ΑΒ και ΓΕ=ΑΓ. Δείξτε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από την ΒΓ.

26. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε $B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{B}E$. Δείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές
β) Τα Δ,Ε ισαπέχουν από την ΒΓ.

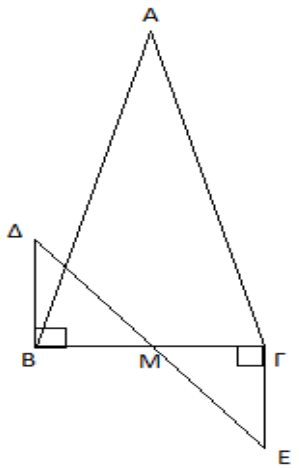
27. Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Το ύψος ΒΔ και η διχοτόμος ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Κ, ενώ το ύψος Β'Δ' και η διχοτόμος Α'Ε' του τριγώνου Α'Β'Γ' τέμνονται στο Κ'. Αποδείξτε ότι:
α) ΚΔ=Κ'Δ'
β) ΚΕ=Κ'Ε'

28. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος των Β, Γ αντίστοιχα παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να δείξετε ότι:
α) ΔΓ=ΒΕ
β) $\Delta\hat{\Gamma}E = E\hat{B}\Delta$
γ) Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΓΔ, ΒΕ η ΑΡ είναι διχοτόμος της $B\hat{P}\Gamma$.

29. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε δύο ημιευθείες Αx, Αy κάθετες στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα (που είναι έξω από το τρίγωνο). Στις Αx και Αy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Β' και Γ' ώστε ΑΒ'=ΑΒ και ΑΓ'=ΑΓ. Δείξτε ότι: ΒΓ'=ΓΒ'.

30. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το Α και παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΒ'=ΑΒ και ΑΓ'=ΑΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι η προέκταση της ΑΜ προς το Α διέρχεται από το μέσο της Β'Γ'.

31. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με ΒΔ=ΓΕ και $B\Delta \perp B\Gamma$, $\Gamma E \perp B\Gamma$. Αν τα τμήματα ΒΓ και ΔΕ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι: $AM \perp B\Gamma$



32. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και $Κ, Λ$ τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Στο $Κ$ φέρνουμε κάθετη στην $ΑΒ$ που τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο $Δ$ και στο $Λ$ φέρνουμε κάθετη στην $ΑΓ$ που τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι:

α. $ΚΔ = ΕΛ$.
β. $ΕΒ = ΔΓ$.
γ. Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

33. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Μ μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $ΜΔ \perp ΑΒ$ και $ΜΕ \perp ΑΓ$. Αν $ΔΔ' \perp ΑΓ$ και $ΕΕ' \perp ΑΒ$ να αποδειχθεί ότι ΔΔ'=ΕΕ'.

34. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' ισχύει ότι: $\hat{Α} = \hat{Α}', υ_α = υ_{α'}, δ_α = δ_{α'}$ Να δείξετε ότι είναι ίσα.

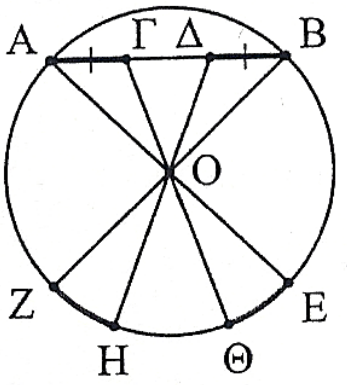
35. Σε ευθεία ε παίρνουμε δύο σημεία Α και Β. Με διάμετρο ΑΒ=2ρ γράφουμε κύκλο κέντρου Ο. Γράφουμε επίσης τους κύκλους με κέντρα τα Α και Β και ακτίνας ρ. Αν Γ,Δ τα σημεία τομής των κύκλων αυτών με τον πρώτο κύκλο, τα οποία βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε, να δείξετε ότι: $Α\hat{Ο}Γ = Β\hat{Ο}Δ$.

36. Σε κύκλο με κέντρο το Ο παίρνουμε μια χορδή ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα
β) Τα σημεία Γ και Δ ισαπέχουν από τις ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα.

37. Σε κύκλο με κέντρο το Ο παίρνουμε δυο ίσες χορδές οι οποίες όταν προεκταθούν τέμνονται σε σημείο Μ εκτός του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:
α) Το σημείο Μ απέχει το ίδιο από τα άκρα των χορδών αυτών.
β) Η ΟΜ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν οι χορδές.

38. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται στο Κ ώστε $Ο\hat{Κ}Α = Ο\hat{Κ}Γ$. Δείξτε ότι ΑΒ=ΓΔ.

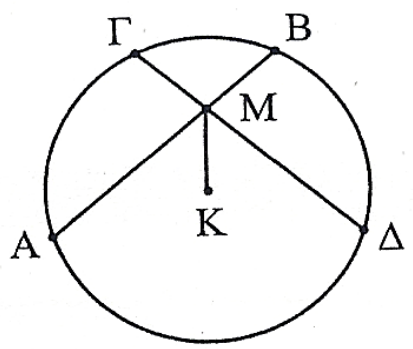
39. Στον διπλανό κύκλο κέντρου Ο οι ΑΕ και ΒΖ είναι διάμετροι. Στη χορδή ΑΒ, θεωρούμε τα σημεία Γ και Δ ώστε ΑΓ=ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ισοσκελές.
β) Αν οι ΓΟ και ΔΟ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Θ και Η αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $ΖΗ = ΘΕ$.



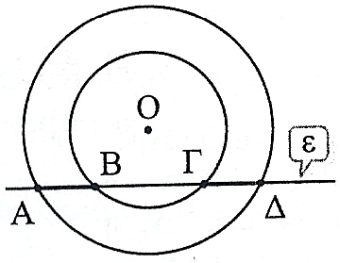
40. Στον κύκλο με κέντρο Κ οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες και τέμνονται στο Μ. Να αποδείξετε ότι :

α) η ΜΚ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΔ

β) ΜΑ=ΜΔ.



41. Η ευθεία ε τέμνει τους δυο ομόκεντρους κύκλους στα σημεία Α,Β,Γ και Δ Αποδείξτε ότι ΑΒ=ΓΔ.



42. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος του. Από το Β φέρνουμε $BZ \perp AΔ$ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Δείξτε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές.

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ.

43. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και μια χορδή του ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο του τόξου AB. Δείξτε ότι το Μ ισαπέχει από τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της χορδής ΑΒ.

44. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ κατά τμήμα ΑΔ=ΒΑ και την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα ΑΕ=ΓΑ.

α) Αποδείξτε ότι ΔΕ=ΒΓ.

β) Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΒΜ του ΑΒΓ κατά τμήμα ΜΝ=ΒΜ.
Αποδείξτε ότι ΑΝ=ΔΕ.

45. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήματα ΒΔ=ΒΑ και ΓΕ=ΓΑ. Θεωρούμε τις διχοτόμους Βx και Γy των $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ αντίστοιχα, των οποίων οι φορείς τέμνονται στο σημείο Μ. Αποδείξτε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΔΜΒ είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

46. Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε να είναι ΒΔ=ΓΕ=ΑΖ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τέμνονται ανά δύο στα σημεία Μ, Ν και Ρ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΒΕ=ΓΖ

β) Το τρίγωνο ΜΝΡ είναι ισόπλευρο.

47. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και το προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΜΖ. Αν οι ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ο να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές

β) ΑΒ=ΓΖ

γ) ΓΕ=ΒΖ

δ) Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές.

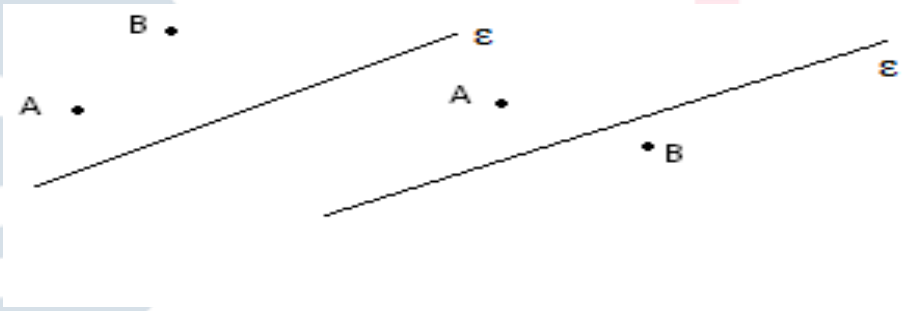
48. Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ<ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ=ΑΓ και ΑΕ=ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Αποδείξτε ότι:

α) $A\hat{E}B = A\hat{B}E$ και $A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma$

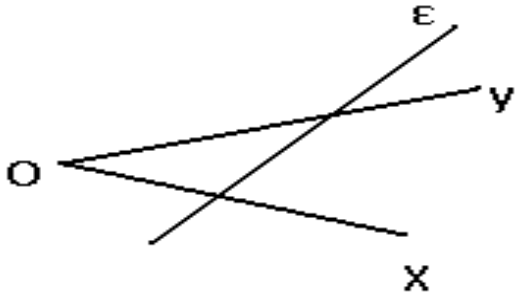
β) Το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές

γ) Η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.

49. Στα δύο σχήματα βρείτε σημείο της ευθείας ε που ισαπέχει από τα Α και Β.



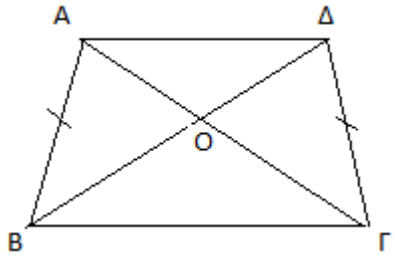
50. Βρείτε σημείο της ευθείας ε που ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$.



51. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι:
ΑΒ=ΓΔ και ΑΓ=ΒΔ. Αποδείξτε ότι:

α) το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

β) τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΓΔΟ είναι ίσα.



52. Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) παίρνουμε σημείο Δ το οποίο ισαπέχει από τα άκρα της βάσης του. Αποδείξτε ότι το Δ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

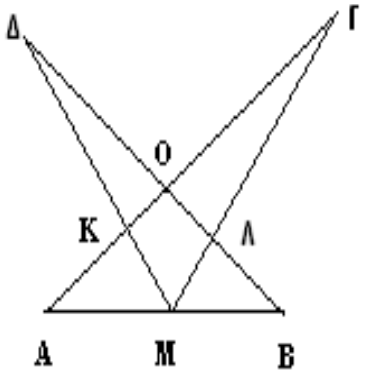
53. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει δυο ύψη ίσα. Αποδείξτε ότι είναι ισοσκελές.

54. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές

β) αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τότε ΚΔ=ΛΔ

γ) η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ



55. Στο σχήμα έχουμε ΑΜ=ΜΒ, ΜΓ=ΜΔ, ΑΓ=ΒΔ.
Αποδείξτε ότι:

Α) Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΒΔΜ είναι ίσα.

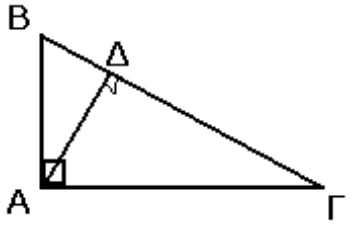
Β) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές

Γ) $\Delta\hat{M}A = \Gamma\hat{M}B$

Δ) Τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΜΛ είναι ίσα

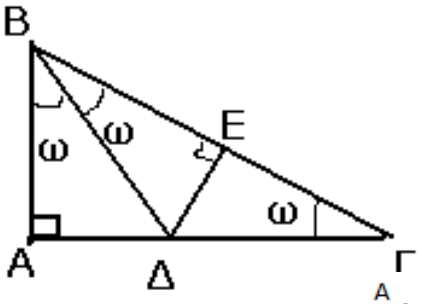
Ε) Το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ισοσκελές.

56. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και ΑΔ το ύψος του. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τα τμήματα : ΑΓ,ΑΔ,ΒΓ,ΑΒ.



57. Τοποθετήστε τα σύμβολα(=, <,>)

α) ΑΒ….ΒΓ
β) ΑΔ….ΔΕ
γ) ΓΕ….ΓΔ
δ) ΒΔ….ΔΓ
ε) ΑΔ….ΔΓ
στ) ΒΓ….ΒΔ
ζ) ΑΓ….ΑΒ

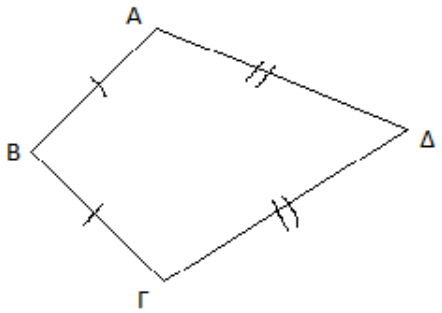


58. Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=ΒΓ, ΑΔ=ΔΓ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.
Αποδείξτε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα.

β) ΑΒ<ΑΔ

γ) Αν Ο το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ τότε ΒΟ<ΟΔ.



59. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ, αποδείξτε ότι ΔΒ<ΔΓ.

60. Εξετάστε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές: α) α=4,β=6,γ=8 β) α=3,β=5,γ=9

61. Σε τρίγωνο ΑΒΓ από τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ φέρνουμε $\Delta E \perp AB, \Delta Z \perp A\Gamma$. Δείξτε ότι: ΕΖ<ΒΓ.

62. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι:

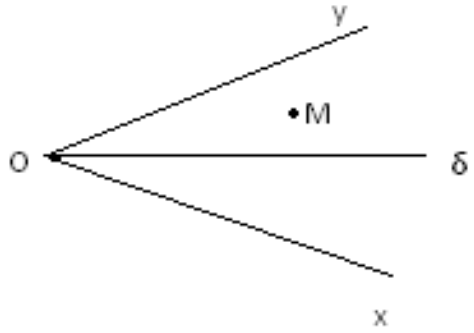
α) $υ_α < \frac{β+γ}{2}$ β) $υ_α + υ_β + υ_γ < 2τ$

63. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Δείξτε ότι:

α) ΑΒ=ΓΕ β) $ΑΔ < \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$

64. Αν ΟΔ διχοτόμος της $x\hat{O}y$ δείξτε

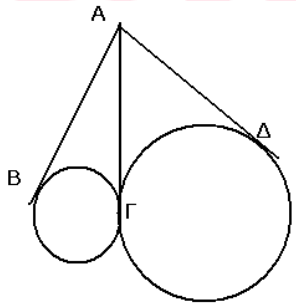
ότι η απόσταση του Μ από την Ox είναι μεγαλύτερη από την απόσταση του Μ από την Oy.



65. Ένα σημείο Α απέχει από μια ευθεία ε απόσταση ίση με α. Βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας ε με τον κύκλο $(A, \frac{3}{2}α)$.

66. Στο διπλανό σχήμα να δείξετε

ότι ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ



67. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, σημείο Μ εκτός αυτού και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου. Στη χορδή ΑΒ θεωρούμε σημεία Γ και Δ με ΑΓ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΓΔ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ΜΓΟ και ΜΔΟ είναι ίσα.

68. Από το εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ . Μια τρίτη εφαπτόμενη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ, ΡΒ στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα. Αν ΡΑ=4cm τότε:

α) Αποδείξτε ότι ΓΑ=ΓΕ και ΔΒ=ΔΕ.

β) Υπολογίστε την περίμετρο του τριγώνου ΡΓΔ.

69. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, σημείο Μ εκτός αυτού και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΟ.Αποδείξτε ότι:

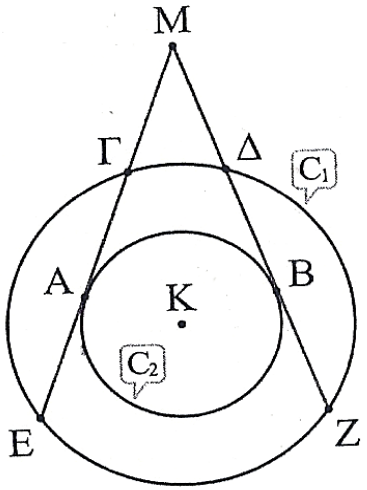
α) $\Delta\hat{\Gamma}M = 90^o$

β) αν οι ευθείες ΔΓ και ΟΒ τέμνονται στο Ε, τότε το τρίγωνο ΕΔΟ είναι ισοσκελές.

70. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι (C_1) και (C_2) με κέντρο Κ. Από σημείο Μ εκτός των κύκλων φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ του κύκλου (C_2) που τέμνουν τον (C_1) στα σημεία Γ και Δ και οι προεκτάσεις στα Ε και Ζ. Αποδείξτε ότι:

α) ΜΕ=ΜΖ

β) ΑΔ=ΒΓ.



71. Δύο ίσοι κύκλοι (Ο,R) και (Κ,R) έχουν διάκεντρο $OK = R\sqrt{3}$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι τέμνονται.

72. Βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων (Κ,α) και (Λ,α) όταν:

α) ΚΛ=α β) ΚΛ=2α γ) ΚΛ=0 δ) ΚΛ=3α

73. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,5). Να βρείτε το μήκος της διακέντρου των δύο κύκλων, αν αυτοί:

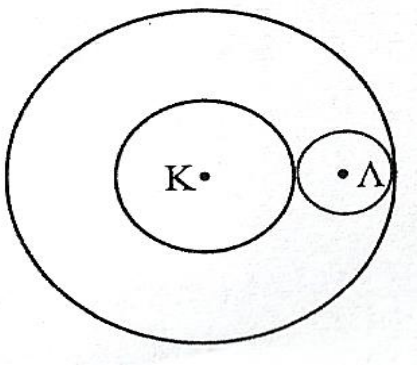
α) εφάπτονται εσωτερικά β) εφάπτονται εξωτερικά

74. Δίνονται οι κύκλοι (Κ,4) και (Λ,7) με διάκεντρο δ. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων όταν: α) δ=13 β) δ=11 γ) δ=6 δ) δ=3 ε) δ=1

75. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α να αποδείξετε ότι η κοινή εσωτερική εφαπτομένη αυτών διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων.

76. Τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο . Δείξτε ότι τα σημεία επαφής ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

77. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι (Κ,5) και (Κ,3). Αν ο κύκλος κέντρου Λ εφάπτεται στους δύο άλλους κύκλους, τότε να βρείτε την ακτίνα του και την απόσταση ΚΛ.



78. Δύο κύκλοι με κέντρα Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη (ε) των δυο κύκλων εφάπτεται των δύο κύκλων στα σημεία Β και Γ. Αν η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνει την (ε) στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) το Μ είναι μέσο του τμήματος ΒΓ

β) $\text{ΚΜΛ} = 90^o$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

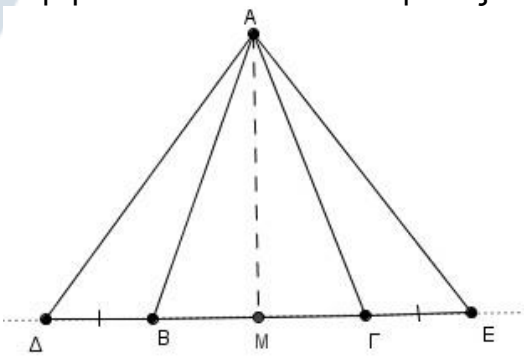
79. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ=ΑΓ και τη ΓΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΓΒ. Αποδείξτε ότι ΑΕ=ΒΔ.

80. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) και στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα παίρνουμε τμήματα $\text{ΑΔ} = \frac{1}{3}\text{ΑΒ}$ και $\text{ΑΕ} = \frac{1}{3}\text{ΑΓ}$.Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα.
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

81. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ= ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΑΒΔ} = \text{ΑΓΕ}$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα
γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ.

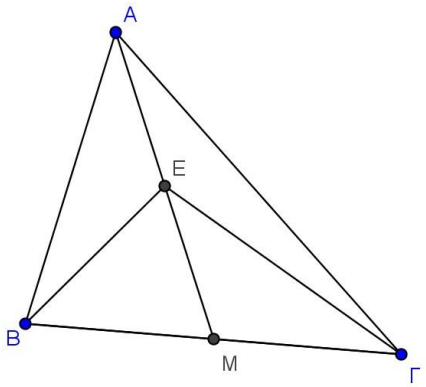


82. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ=ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$ Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ=ΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές
β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ

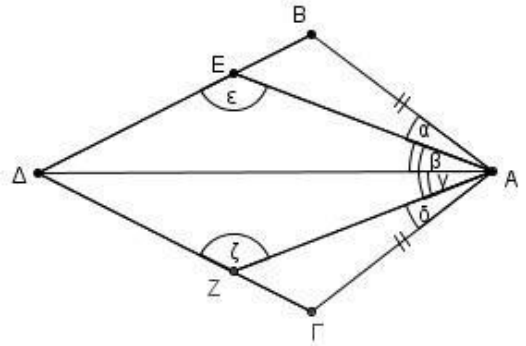
83. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2 ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΑΕΒ} = \text{ΕΜΓ}$
β) ΑΒ = ΕΓ .



84. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ=ΟΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΜΑ=ΜΒ.
β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.

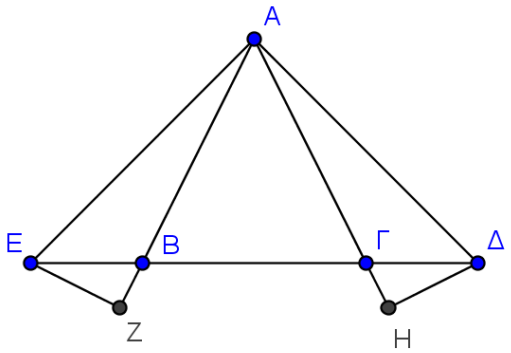
85. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και ΑΒ=ΑΓ, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες.



86. Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Α'Β'Γ' (Α'Β'=Α'Γ').
α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει ΑΒ = Α'Β' και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα
β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει ΑΓ = Α'Γ' και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα

87. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp BΓ$ και $ΔZ \perp BΓ$, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα.
β) ΕΗ = ΔΖ.

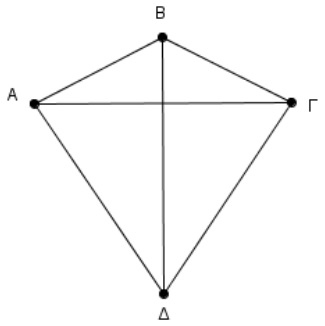
88. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΔ = ΑΕ
β) ΕΖ = ΔΗ



89. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα.
β) ΑΔ=ΑΕ

90. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ=ΒΓ και ΔΑ=ΔΓ. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.



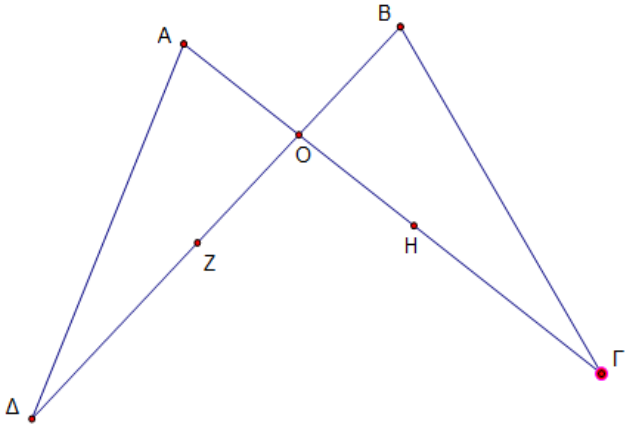
91. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ=ΜΛ.

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ

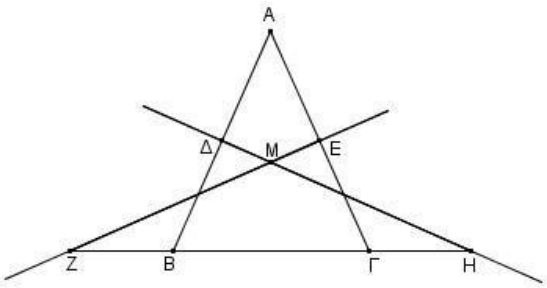
92. Δίνονται τα τμήματα ΑΓ=ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ=ΟΒ, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΗ=ΟΖ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ΑΔΟ και ΒΓΟ είναι ίσες.
β) ΑΖ=ΒΗ .



93. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
α) ΜΔ=ΜΕ
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

94. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.
α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.



95. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

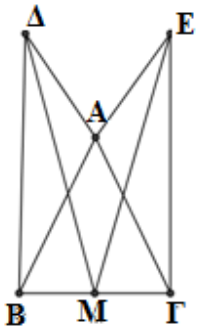
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ.

96. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα ΒΔ⊥ΒΓ και ΓΕ⊥ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

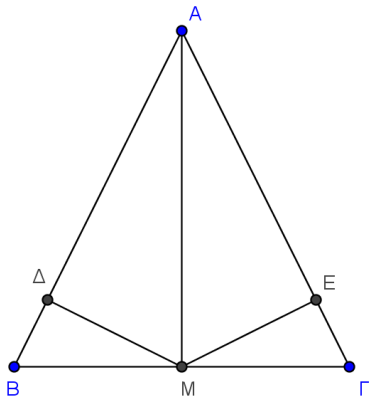
β) ΑΔ=ΑΕ.



97. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα.

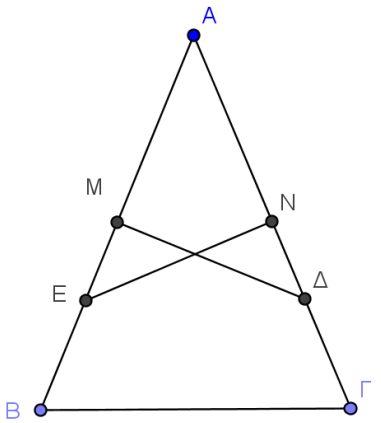
β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ.



98. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ



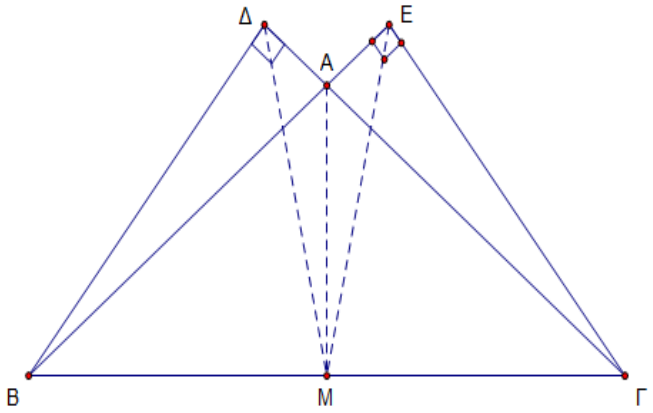
99. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$.

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔME



100. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90$) και η διχοτόμος της γωνίας του Γ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.

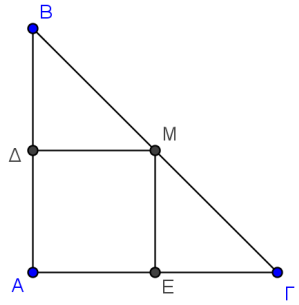
101. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ=ΜΕ τότε

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα.

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ.

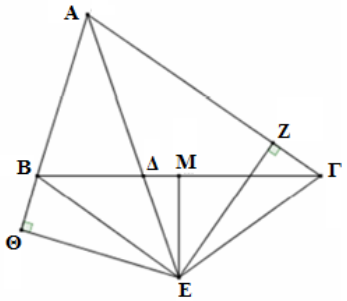


102. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ, Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ, ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.

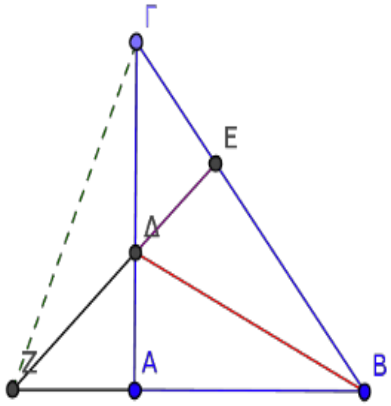
γ) $A\hat{\Gamma}E + A\hat{B}E = 180^o$.



103. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^0$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ=ΑΒ,

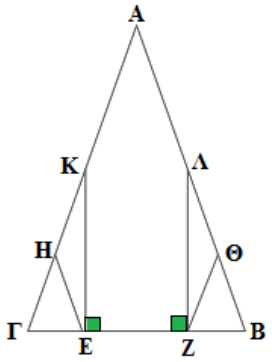
β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.



104. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.

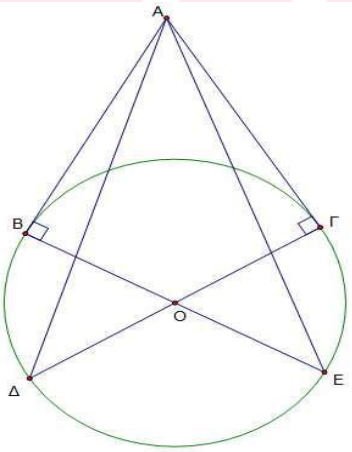
β) ΕΗ=ΖΘ, όπου Η, Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.



105. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.

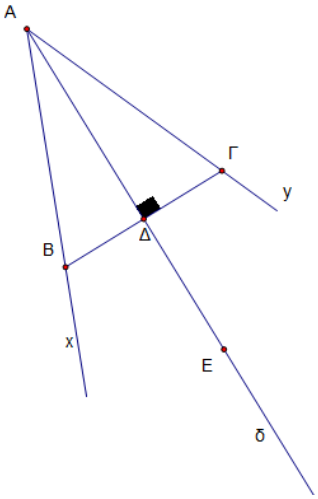
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.



106. Δίνεται γωνία $x\hat{A}y$ και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Ay στο Γ. Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα.

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.



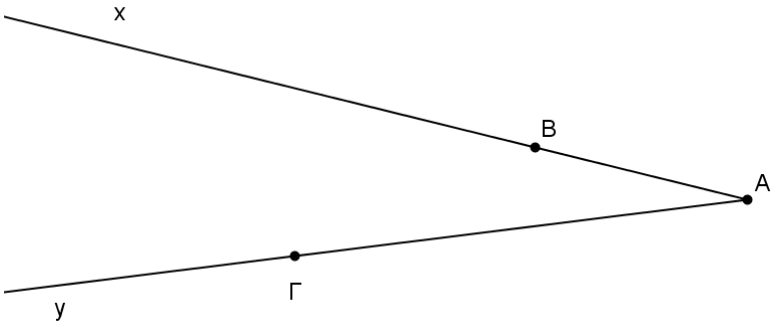
107. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δυο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δυο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δυο πλατάνια.

β) ισαπεχει από τα δυο ποτάμια.

γ) ισαπεχει και από τα δυο πλατάνια και από τα δυο ποτάμια.

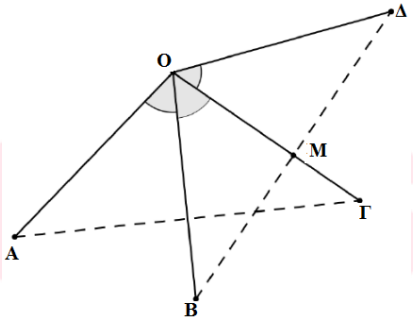
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



108. Αν $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta$ και ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ=ΒΔ .

β) Το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ.

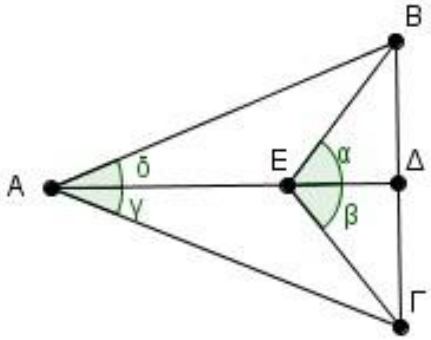


109. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος ισχύουν α=β και γ=δ να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



110. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

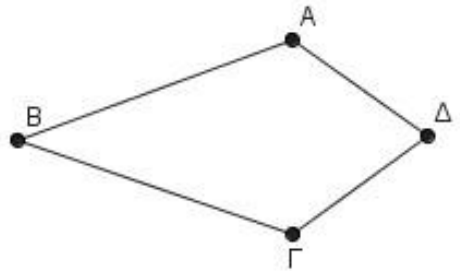
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ=ΑΒ.

111. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξτε ότι:

α) $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B\Gamma A}$

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

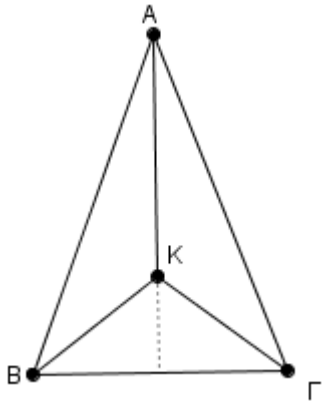


112. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ=ΚΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα.

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία ΒΚΓ



113. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ=ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα.

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία .

114. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές.

β) Οι γωνίες ΑΙΓ και ΑΙΒ είναι ίσες

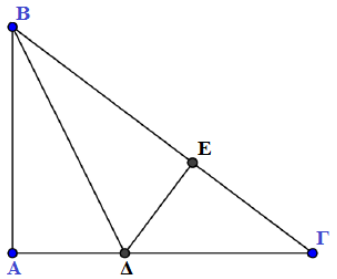
γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

115. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A}$=90°). Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ.

β) ΑΔ < ΔΓ.

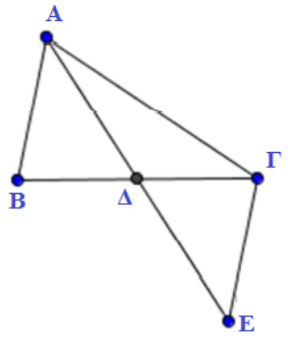
γ) ΑΓ>ΑΒ.



116. Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ , ώστε ΔΕ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ=ΓΕ

β) ΑΔ< $\frac{AB+A\Gamma}{2}$.



117. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90˚), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε .Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ=ΔΕ β) ΑΔ<ΔΒ

118. Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε) . Έστω Α' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε).

α) Αν η Α'Β τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$.

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε)

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

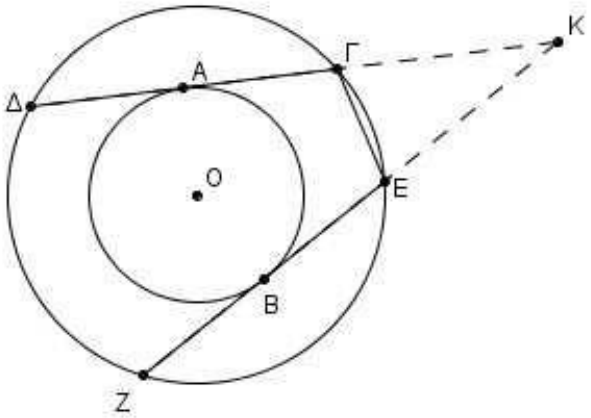
i. ΚΑ=ΚΑ'.

ii. ΚΑ+ΚΒ>ΑΟ+ΟΒ.

119. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΖΕ.

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.



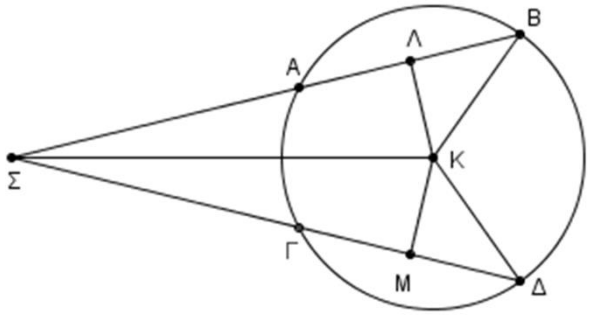
120. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ΣΒ=ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα.

ii. ΚΛ=ΚΜ

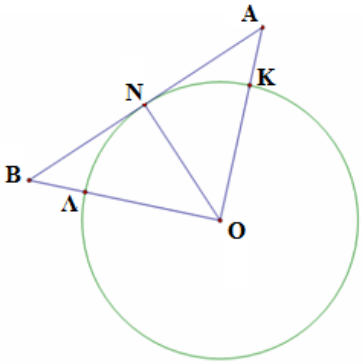
β)Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες.



121. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές.

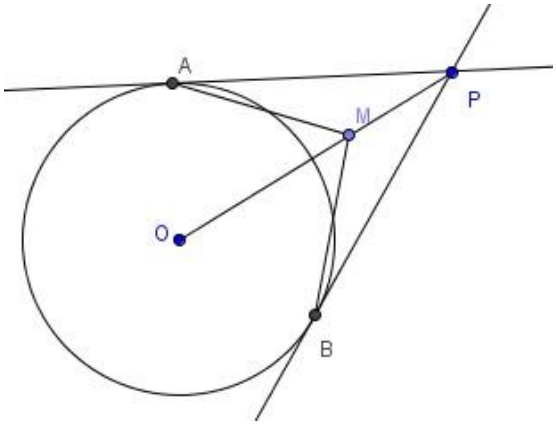
β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.



122. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.

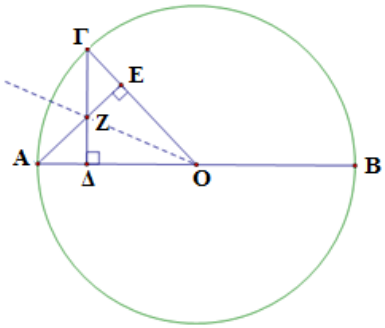
β) Οι γωνίες ΜΑΟ και ΜΒΟ είναι ίσες



123. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.



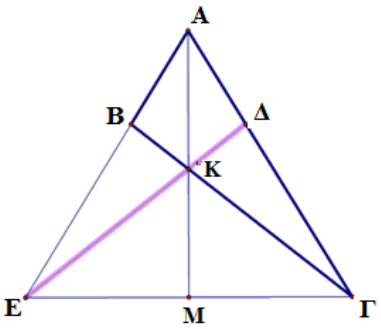
124. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΔ=ΑΒ. Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ=ΔΕ.

β) ΒΚ=ΚΔ.

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.



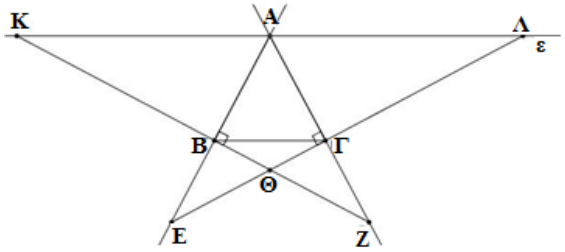
125. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΖ=ΑΕ

ii. ΑΚ=ΑΛ

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.



Copy protected with Online-PDF-No-Copy.com