ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Απόδειξη σελ.111, σχολικό βιβλίο. **Α2.** Ορισμός σελ.104, σχολικό βιβλίο.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 74.

Α4. (α) Ψευδής. **(β)** Παράδειγμα σελ. 61 σχολικό βιβλίο, $f(x)=\frac{1}{x}$ και $x_0=0$.

Α5. (α) Σωστό. **(β)** Σωστό. **(γ)** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$, $x\neq 3$.

Για $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3x_1+1)\cdot(x_2-3)=(3x_2+1)\cdot(x_1-3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x_1+x_2=-9x_2+x_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10x_1=-10x_2\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι $1-1$ και επομένως, αντιστρέφεται.

Β2. Λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{x-3}\Leftrightarrow yx-3y=3x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow yx-3x=3y+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(y-3)x=3y+1\Leftrightarrow \qquad (\text{πρέπει } y-3\neq 0\Leftrightarrow y\neq 3)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3y+1}{y-3}$$

(πρέπει $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$. Έχουμε $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y+1 = 3y-9 \Leftrightarrow 0y = -10$ (αδύνατη εξίσωση)

Άρα $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$ ισχύει για κάθε $y \neq 3$)

Άρα, $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, με $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$.

Επομένως, $D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Άρα, οι f, f^{-1} είναι ίσες.

B3. Το πεδίο ορισμού της fof είναι:

$$D_{fof} = \left\{x \in D_f \;:\; f(x) \in D_f\right\} = \{x \neq 3 \;:\; f(x) \neq 3\} = \left\{x \neq 3 \;:\; \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\}.$$

Όπως δείξαμε στο πρώτο ερώτημα, ισχύει $\frac{3x+1}{x-3} \neq 3$ για κάθε $x \neq 3$. Άρα, $D_{fof} = \mathbb{R} - \{3\}$.

Επίσης, έχουμε:

$$(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x+3+x-3}{x-3}}{\frac{3x+1-3x+9}{x-3}} = \frac{10x}{10} = x.$$

Άρα, ισχύει $(fof)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

B4. Ψάχνουμε το όριο:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1}\right) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1}\right).$$

Έχουμε για κάθε $x \neq -\frac{1}{3}, 3$:

$$\left|f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1}\right| = |f(x)| \cdot \left|\eta\mu \frac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|,$$

και άρα

$$-|f(x)| \leq f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|.$$

Είναι

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} |f(x)| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής, προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Το ύψος που φέρουμε από την κορυφή Α είναι και διάμεσος , άρα είναι και μεσοκάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, επομένως θα διέρχεται και από το κέντρο Ο .

Επομένως το ΑΜ είναι και διάμεσος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ: $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow BM = \eta\mu\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow OM = \sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$ και $AM = A0 + 0M = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Άρα $E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot AM = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\ \theta\epsilon(0,\pi)$

Τελικά $E(\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\ ,\theta\epsilon(0,\pi)$

Γ2 . $E'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)+\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta-1+\sigma\upsilon\nu^2\theta=$

$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1 =2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right) \quad \theta\epsilon(0,\pi)$

Λύνουμε : $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = -1$ $\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\ \sigma\tau o\ (0,\pi)$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right) > 0 \quad \underset{\Longleftrightarrow}{\theta \in (0,\pi) \quad -1 < \sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{\theta \in (0,\pi) \quad -1 < \sigma\upsilon\nu\theta} \quad \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \overset{\downarrow}{\Leftrightarrow} \theta < \frac{\pi}{3}$$

x	$-\infty$	0		$\pi/3$		π	$+\infty$
$E'(\theta)$			+	0	-		
$E(\theta)$			↗		↘		

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$

Γ3 .

$$\lim_{\theta\to 0} E(\theta) = \lim_{\theta\to 0}\big((1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta\big) = 0$$

$$\lim_{\theta\to \pi} E(\theta) = \lim_{\theta\to \pi}\big((1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta\big) = 0$$

$$A_1 = E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\right) = (\lim_{\theta\to 0} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)] = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

$$A_2 = E\left(\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\right) = \left(\lim_{\theta\to\pi} E(\theta), \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+} E(\theta))\right) = \left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$\frac{3}{4}\ \epsilon A_1$ *άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\theta_1 \epsilon \left(0,\frac{\pi}{3}\right] : E(\theta_1) = \frac{3}{4}$

που είναι μοναδικό στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ *αφού* $E \uparrow \left(0,\frac{\pi}{3}\right]$

$\frac{3}{4}\ \epsilon A_2$ *άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα* $\theta_2 \epsilon \left(\frac{\pi}{3},\pi\right) : E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

που είναι μοναδικό στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ *αφού* $E \downarrow \left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$

Γ4 . Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση E στα $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$

E *συνεχής στα* $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

E *παραγωγίσιμη στα* $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right), \xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right)$ *ώστε :*

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1}$$

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}}$$

Άρα $\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)\cdot E'(\xi_1) + \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)\cdot E'(\xi_2) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)\cdot \frac{\frac{3\sqrt{3}-3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} + \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right)\cdot \frac{3 - 3\sqrt{3}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = 0$

Άρα $\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)\cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)\cdot E'(\xi_2).$

<u>ΘΕΜΑ Δ.</u>

Δ1. $f(x) = x \cdot \ln x - \ln(\lambda x)$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα, η f' είναι γνησίως αύξουσα και άρα και $1-1$.

Λύνουμε :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(1) \xLeftrightarrow{f':\ 1-1} x = 1$, και
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \xLeftrightarrow{f':\ γν.αύξουσα} x > 1$.

Άρα, για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -\ln \lambda$.

Το σημείο ακρότατου της f είναι το $A(1, -\ln \lambda)$. Άρα, το σημείο αυτό ανήκει στην ευθεία $x = 1$, καθώς το λ μεταβάλλεται.

Δ2. Εχουμε για κάθε $x > 0$:

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow lnx^x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow xlnx - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0\,.$$

Εφόσον η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$f(1) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1.$$

Άρα, η μεγαλύτερη τιμή του λ για την οποία ισχύει το ζητούμενο είναι $\lambda_{max} = 1$.

Δ3. Για $\lambda = 1$, έχουμε: $f(x) = x \cdot \ln x - \ln x = (x-1) \cdot \ln x$.

Έστω $M\big(x_0, g(x_0)\big)$ σημείο της γραφικής παράστασης της g. Η εφαπτομένη ε της C_g στο σημείο M έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

όπου $g'(x) = (x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$, για κάθε $x > 0$.

Το $O(0,0)$ είναι σημείο της ε αν και μόνο αν:

$$-g(x_0) = g'(x_0) \cdot (-x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = x_0 \cdot g'(x_0) \Leftrightarrow x_0^{x_0} = x_0 \cdot x_0^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 1)$$

$$\overset{x_0^{x_0} \neq 0}{\Longleftrightarrow} 1 = x_0 \cdot (\ln x_0 + 1) \overset{x_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{x_0} = \ln x_0 + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = f'(1) \overset{f':\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x_0 = 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_g που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι η εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$, με εξίσωση:

$$\varepsilon:\ \ y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow\ y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow\ y = x.$$

Δ4. (i) Για $x > 0$, η συνάρτηση h είναι συνεχής, ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο 0, υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}.$$

Θέτουμε $u = x \cdot \ln x$. Τότε, από τον κανόνα De L' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x \to 0^+} u = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{u \to 0} e^u = e^0 = 1 = h(0).$$

Συνεπώς, η h είναι συνεχής στο 0 .

Άρα η h είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_h = [0, +\infty)$.

(ii) Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ για την εξίσωση:

$$x^{2020} \cdot \left(3 - 2 \cdot \int_1^2 g(t)\, dt\right) + (1 - x) \cdot \int_0^1 h(1 - t)\, dt = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x) = x^{2020} \cdot \left(3 - 2 \cdot \int_1^2 g(t)\, dt\right) + (1-x) \cdot \int_0^1 h(1-t)\, dt\,, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

- Η K είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $K(0) = \int_0^1 h(1-t)dt$.
- $K(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)dt$.

Προφανώς ισχύει ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in D_h = [0,+\infty)$.

Άρα $h(1-t) > 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Άρα από γνωστή ιδιότητα ισχύει $\int_0^1 h(1-t)dt > 0$. Άρα $K(0) = \int_0^1 h(1-t)dt > 0$.

Η g είναι κυρτή στο διάστημα $[1,2]$ αφού για κάθε $x \in [1,2]$ ισχύει

$$g''(x) = x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} > 0$$

Άρα αφού η y=x είναι εφαπτομένη , τότε από γνωστό

$g(t) \geq t$ για κάθε $t > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t = 1$.

Άρα,

$$\int_1^2 g(t)\, dt > \int_1^2 t\, dt \Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\, dt > \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 g(t)\, dt > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g(t)\, dt > 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > 3 - 2\int_1^2 g(t)\, dt \Leftrightarrow 0 > K(1) \Leftrightarrow K(1) < 0.$$

Τελικά, $K(0) \cdot K(1) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.