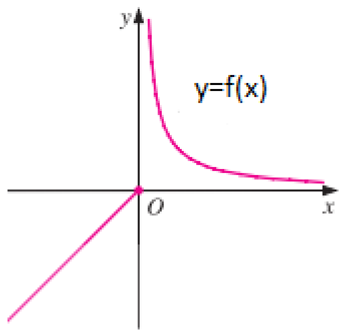
ΘΕΜΑ Α:

Α.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 99

Α.2. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη. (σελ. 35 σχολικό βιβλίο)



Α.3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 216

Α.4 α)Λάθος β)Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β:

Β.1. $f(x)=x-\frac{4}{x^2},\ D_f=R^*$.Η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=1+\frac{8x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}, D_{f'}=R^*$$

Λύνουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$

και $f'(x)>0\Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}>0\Leftrightarrow (x^3+8)x^3>0$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+\infty$
x^3+8	-	+	+
x^3	-	-	+
$(x^3+8)x^3$	+	-	+

Άρα $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x^3 + 8)x^3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μελέτης:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'	+	-	‖	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	‖	$\nearrow$

Επομένως :
η f είναι γν.αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $(0, +\infty)$
η f είναι γν.φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$
και η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x= -2 , το οποίο
είναι το $f(-2) = -3$

B.2. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = -\frac{24}{x^4}, x \in R^*$.

Παρατηρούμε ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in R^*$, αφού $x^4 > 0$ για κάθε $x \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	‖	-
f	$\frown$	‖	$\frown$

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

B.3. **<u>Κατακόρυφες Ασύμπτωτες</u>**
Αφού η f ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι συνεχής, τότε η μοναδική πιθανή θέση κατακόρυφης ασύμπτωτης είναι x=0.
Έχουμε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

γιατί $\lim_{x \to 0} x = 0$
και $\lim_{x \to 0} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$ (αφού $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$,$x^2 > 0$ κοντά στο 0 και - 4<0).

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγιες-Οριζόντιες Ασύμπτωτες

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x - \frac{4}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

αφού $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα, η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \frac{4}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B.4. $D_f = R^*$ και f είναι συνεχής.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

αφού $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

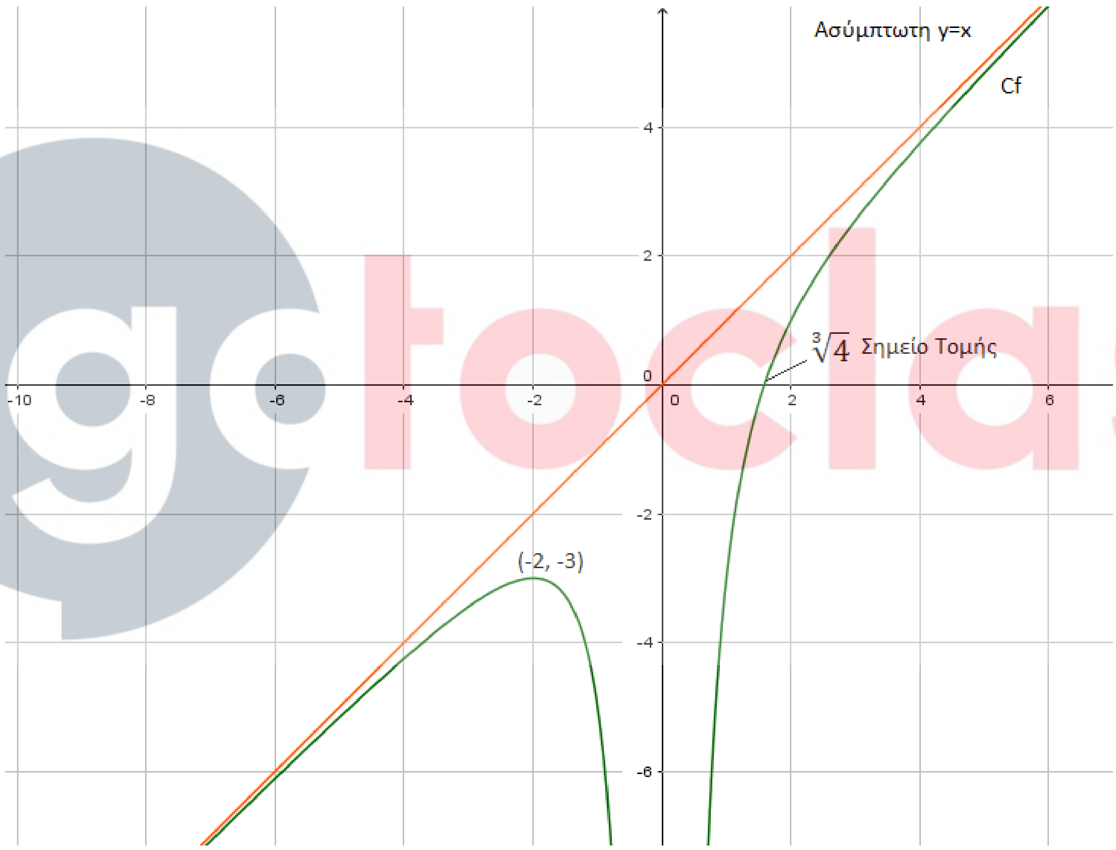
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$

Πίνακας Μεταβολών

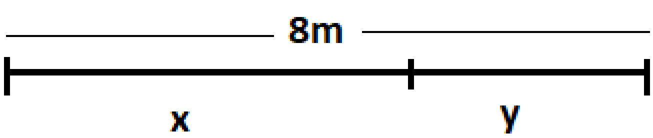
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f''		-		-	‖	-	
f'		+		-	‖	+	
f		↗	T.M	↘	‖	↗	

Με βάση όλα τα παραπάνω προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.



ΘΕΜΑ Γ.

Γ.1. Έστω x , y τα δυο τμήματα.
(y είναι το τμήμα από το οποίο κατασκευάζουμε τον κύκλο)



Το τετράγωνο έχει περίμετρο x, άρα η πλευρά του είναι ίση με $\frac{x}{4}$.
Το εμβαδό του τετραγώνου είναι:

$$E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου και αφού y είναι η περίμετρος του κύκλου, τότε

$$y = 2\pi\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{y}{2\pi} \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}.$$

Άρα, το εμβαδό του κύκλου είναι:

$$E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \pi\rho^2 = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \pi\cdot\frac{64-16x+x^2}{4\pi^2} = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}.$$

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = E_{\tau\varepsilon\tau\rho} + E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4\left(64-16x+x^2\right)}{16\pi} =$$

$$= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 8 - x > 0 \Leftrightarrow x < 8$.
Άρα η συνάρτηση $E(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $D_E = (0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,8)$ με

$$E'(x) = \frac{1}{16\pi}\cdot(2(\pi+4)x - 64) = \frac{1}{8\pi}\cdot((\pi+4)x - 32).$$

Έχουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\cdot((\pi+4)x-32) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}.$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8\pi}\cdot((\pi+4)x-32) > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{32}{\pi+4}.$$

x	$-\infty$	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	$+\infty$
$E'(x)$			+	0	- +		
$E(x)$			↘		↗		

Η συνάρτηση E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}$, το οποίο είναι το $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi+4}$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι

$$\frac{x}{4} = \frac{32}{4(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Η διάμετρος του κύκλου είναι:

$$\delta = 2\rho = \frac{y}{\pi} = \frac{8 - x}{\pi} = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi + 32 - 32}{\pi(\pi + 4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi + 4)} = \frac{8}{\pi + 4}.$$

Παρατηρούμε ότι $\delta = \frac{x}{4}$.

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ.3. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,8)$.

Η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$, οπότε:

$$E\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)\right)=\left(\lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-} E(x), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right)=\left(E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)=$$

$$=\left(\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

Έχουμε ότι: $5<\frac{16}{\pi} \Leftrightarrow 5\pi<16$ που ισχύει

$\frac{16}{\pi+4}<5 \Leftrightarrow 16<5\pi+20 \Leftrightarrow -4<5\pi$ που ισχύει

Επομένως , $5\in E\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)\right)=\left(\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$ αφού η Ε είναι γν.φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$.

Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$, οπότε:

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4}, \lim_{x\to 8^-}\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\right)=$$

$$=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

Προφανώς , $5\notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$, άρα η εξίσωση $E(x) = 5$ δεν έχει καμία ρίζα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$.

Τελικά η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,8)$.

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1. Έχουμε $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 1$. Επομένως,

$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a.$$

Ομοίως,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < a$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

x	$-\infty$ α	$+\infty$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής που είναι το $A(\alpha, f(\alpha))$, δηλαδή το σημείο $A(\alpha, 2-\alpha^2)$, με $\alpha > 1$.

Δ2. Ισχύει ότι:

$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$ α	$+\infty$
$f''(x)$	-	+
$f'(x)$	↘	↗

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$ και άρα

$$f'\big((-\infty, a]\big) = \Big[f'(a), \lim_{x\to-\infty} f'(x)\Big) = [2-2a, \ +\infty),$$

αφού:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty}(2e^{x-a} - 2x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

Το 0 ανήκει στο διάστημα $f'\big((-\infty, a]\big) = [2-2a, +\infty)$ (διότι $\alpha > 1$ και άρα $2 - 2a < 0$).

Επομένως, υπάρχει $x_1 \in (-\infty, a]$ έτσι ώστε $f'(x_1) = 0$, και μάλιστα είναι μοναδικό στο διάστημα $(-\infty, a]$, διότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, a]$.

Επίσης $x_1 \neq \alpha$ (αν $x_1 = \alpha$, τότε $f'(x_1) = f'(\alpha) \Leftrightarrow 0 = 2 - 2\alpha$,άτοπο)

Άρα $x_1 \in (-\infty, \alpha)$.

Ακόμη:

$$x < x_1 \overset{f' \searrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \;\Leftrightarrow f'(x) > 0$$
$$x_1 < x \le a \overset{f' \searrow}{\Longleftrightarrow} f'(x_1) > f'(x) \;\Leftrightarrow 0 > f'(x).$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$ και άρα

$$f'\big((\alpha, +\infty)\big) = \left(f'(a), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right) = (2 - 2a, \;+\infty),$$

εφόσον:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} (2e^{x-a} - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \left[2x\left(\frac{e^{x-a}}{x} - 1\right)\right] =$$

$$= (+\infty)\cdot(+\infty - 1) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-a}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-a} = +\infty.$$

Το 0 ανήκει στο διάστημα $f'\big((\alpha, +\infty)\big) = (2 - 2a, +\infty)$, και άρα υπάρχει $x_2 \in (a, +\infty)$ έτσι ώστε $f'(x_2) = 0$, και μάλιστα είναι μοναδικό στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\alpha, +\infty)$.
Ακόμη:

$$x > x_2 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) \;\Leftrightarrow f'(x) > 0$$
$$\alpha < x < x_2 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \;\Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

Τελικά:

x	$-\infty$ $\qquad$ x_1 $\qquad$ α $\qquad$ x_2 $\qquad$ $+\infty$		
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έτσι ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. 1ος τρόπος

Έχουμε $f'(1) = 2e^{1-\alpha} - 2 = 2\left(e^{1-\alpha} - 1\right) < 0$

αφού $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < e^0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha} < 1$.

Επομένως $1 \in (x_1, x_2)$, αφού σε αυτό το διάστημα και μόνο σε αυτό η f' παίρνει αρνητικό πρόσημο.

Για κάθε $x \in (\alpha, x_2)$ έχουμε

$$x_1 < 1 < \alpha < x < x_2 \overset{f \downarrow (x_1, x_2)}{\Longleftrightarrow} f(1) > f(\alpha) > f(x)$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α, x_2).

$2^{ος}$ τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α, x_2), άρα

$$f\big((\alpha, x_2)\big) = \big(f(x_2), f(\alpha)\big) = (f(x_2), 2 - \alpha^2).$$

Ακόμη, $f(1) = 2e^{1-\alpha} - 1$.

Για να είναι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ αδύνατη στο (α, x_2), αρκεί να δείξουμε ότι $f(1) \notin f\big((\alpha, x_2)\big)$.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(1) > f(\alpha) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0, \quad \text{για } \alpha > 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^{1-x} + x^2 - 3$, με πεδίο ορισμού $D_h = [1, +\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = -2e^{1-x} + 2x\,, \quad x \in [1, +\infty).$$

$$h''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0\,, \qquad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty)$$

$$h' \nearrow [1, +\infty)$$

Άρα $x \geq 1 \overset{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) \geq h'(1) = 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=1)

x	$-\infty$	1		$+\infty$
$h'(x)$		0	$+$	
$h(x)$			$\nearrow$	

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ άρα,

$$\alpha > 1 \Leftrightarrow h(\alpha) > h(1) \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow f(1) > f(\alpha).$$

Συνεπώς, $f(1) \notin f\big((\alpha, x_2)\big)$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Αν $\alpha = 2$, έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[2,3]$.

Επίσης $f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 = 2$ είναι:

$$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - (-2) = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 2.$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2,3]$, σύμφωνα με γνωστό σχόλιο του σχολικού έχουμε:

$$f(x) \geq -2x + 2$$

για κάθε $x \in [2,3]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$).

Επομένως,

$$f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x + 2) \cdot \sqrt{x-2}$$

για κάθε $x \in [2,3]$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$).

Άρα,

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\ dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\ dx \ (1)$$

Έστω
$$I=\int_{2}^{3}(-2x+2)\sqrt{x-2}\ dx.$$
Θέτουμε $u=\sqrt{x-2}$ $οπότε$ $x=u^2+2$, και επομένως $dx=2udu$.
Επίσης, για $x_1=2$ έχουμε $u_1=0$, και για $x_2=3$ έχουμε $u_2=1$. Άρα,
$$I=\int_{0}^{1}(-2u^2-4+2)\cdot u\cdot 2u\ \ du=\int_{0}^{1}(-2u^2-4+2)\cdot 2u^2\ \ du$$
$$=\int_{0}^{1}(-4u^4-4u^2)\,du$$
$$=\left[-\frac{4u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}.$$
Τελικά από την (1) έχουμε ότι:
$$\int_{2}^{3}f(x)\sqrt{x-2}\ \ dx>-\frac{32}{15}.$$

<u>Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του ολοκληρώματος</u>

$I=\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}dx.$
Θέτουμε $u=x-2\Leftrightarrow x=u+2.$
Επομένως, $dx=du.$
Επιπλέον, για $x_1=2$ έχουμε $u_1=0$ και για $x_2=3$ έχουμε $u_2=1.$
Άρα,
$$I=\int_{0}^{1}(-2u-4+2)\sqrt{u}du=\int_{0}^{1}(-2u-2)\sqrt{u}du=\int_{0}^{1}(-2u-2)\cdot u^{\frac{1}{2}}du$$
$$=\int_{0}^{1}\left(-2u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}\right)du=\left[-2\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-2\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\left[-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}$$