ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ 76 σχολικό βιβλίο **Α2.**Σελ 104 σχολικό βιβλίο.

Α3. (α) Ψευδής (β) σχόλιο σελ 136

Α4. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Σωστό (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f: (1,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^x$

B1

πρέπει $\begin{cases} x\epsilon Dg \\ g(x)\epsilon Df \end{cases} = \begin{cases} x\epsilon\mathbb{R} \\ e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^o \Leftrightarrow x > 0 \end{cases}$ άρα $D_{fog} = (0,+\infty)$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(e^x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

άρα $(fog)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, $D_{fog} = (0,+\infty)$

B2 $(f\circ g)'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-\left(e^x+2\right)e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = \dfrac{-3e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$, $D_{(f\circ g)'} = (0,+\infty)$

Προφανώς για κάθε x>0 ισχύει $(f\circ g)'(x) < 0$

Άρα η $f\circ g$ είναι γν.φθίνουσα , άρα είναι 1-1.

Λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$y = (f\circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2 \Leftrightarrow \qquad (\text{πρέπει } y-1\neq 0 \Leftrightarrow y\neq 1)$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow \qquad \left(\text{πρέπει} \frac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y+2)(y-1) > 0 \Leftrightarrow y < -2 \ \text{ η } \ y > 1\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

$$\left(\text{πρέπει} \quad \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow y > 1\right)$$

Άρα $(fog)^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), y > 1$. Τελικά $(fog)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $D_{(fog)^{-1}} = (1,+\infty)$

B3. $\varphi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0 \quad \text{για κάθε } x>1$$

άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

B4. **<u>1ος τρόπος</u>**

$$\lim_{x\to 1^+}\phi(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

(αφού $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

διότι $\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$ και

$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ επειδή $\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $x-1>0$ όταν $x\to 1^+$)

$$\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{=}\lim_{u\to 1}\ln u=0$$

(αφού $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$)

<u>2ος τρόπος</u>

Η συνάρτηση $\phi=(f\circ g)^{-1}$ έχει σύνολο τιμών το $D_{f\circ g}$ δηλαδή το $(0,+\infty)$

Αφού η συνάρτηση $\phi=(f\circ g)^{-1}$ είναι συνεχής στο $D_{(f\circ g)^{-1}}=(1,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών

συναρτήσεων και γν. φθίνουσα τότε η συνάρτηση $\phi=(f\circ g)^{-1}$ έχει συνολο τιμών το

$\left(\lim_{x\to+\infty}\phi(x),\lim_{x\to 1^+}\phi(x)\right)$. Επομένως $\left(\lim_{x\to+\infty}\phi(x),\lim_{x\to 1^+}\phi(x)\right)=(0,+\infty)$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ και $\lim_{x\to 1^+}\phi(x)=+\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Έχουμε $f(0) = 1 - \ln\lambda$

f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ άρα και στο $x = 0$ οπότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) \quad (*)$$

$Επίσης \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (ημx + λσυνx) = λ$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{1-x} - lnλ\right) = 1 - lnλ$

$από\ (*)\ προκύπτει\ 1 - lnλ = λ \Leftrightarrow λ + lnλ - 1 = 0\ (**)$

Θεωρούμε Κ(λ) = $lnλ + λ - 1 \quad D_K = (0, +\infty)$

$K'(λ) = \frac{1}{λ} + 1 > 0\ για\ κάθε\ λ > 0$

$άρα\ K \uparrow στο\ (0, +\infty)\ αρα\ K\ \ 1-1$

$H\ σχέση\ (**)\ γράφεται\ K(λ) = 0 \Leftrightarrow K(λ) = K(1) \overset{K\ 1-1}{\Longleftrightarrow} λ = 1.$

Γ2.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{ημx + συνx - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{ημx}{x} + \lim_{x\to 0+} \frac{συνx - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}\quad αρα\ \ f\ παραγωγίσιμη\ στο\ x = 0$

$με\ \ f'(0) = 1\ αρα\ \ εφω = 1 \Leftrightarrow ω = \frac{π}{4}$, $\quad όπου\ ω\ η\ γωνία\ που\ σχηματίζει\ η$

$εφαπτομένη\ της\ Cf\ με\ τον\ άξονα\ x'x.$

Γ3.

$Για\ x < 0 \quad : \quad f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} > 0\ \ για\ κάθε\ x < 0$

$Αρα\ δεν\ υπάρχουν\ κρίσιμα\ σημεία\ στο\ (-\infty, 0)$

$Για\ x \in \left(0, \frac{3π}{2}\right)\ \ f'(x) = (ημx + συνx)' = συνx - ημx$

Λύνουμε την εξίσωση

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx - ημx = 0 \Leftrightarrow συνx = ημx \Leftrightarrow$ $\quad$ ($ημx \neq 0$ γιατί αν $ημx = 0$ τότε και $συνx = 0$, **άτοπο**)

$$\Leftrightarrow \frac{συνx}{ημx} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow σφx = σφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Πρέπει $0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa + \frac{1}{4} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < \kappa < \frac{5}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$

$για\ \kappa = 0\ :\ x = \frac{\pi}{4}\quad ,\ για\ \kappa = 1:\ \ x = \frac{5\pi}{4}$

$Άρα\ κρίσιμα\ σημεία\ της\ f\ για\ x\epsilon\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) είναι\ τα\ x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$

$f'(0) = 1\ \ άρα\ το\ x = 0\ δεν\ είναι\ κρίσιμο\ σημείο.$

$Τελικά\ κρίσιμα\ σημεία\ της\ f\ είναι\ τα\ x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}.$

Γ4. Από τα ερωτήματα Γ2,Γ3 έχουμε $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ για κάθε $x \le 0$.

$Η\ εφαπτομένη\ της\ Cf\ στο\ M(\alpha, f(\alpha))\ έχει\ εξίσωση\ (\varepsilon): y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$Η\ (\varepsilon)\ τέμνει\ τον\ άξονα\ x'x\ \ στο\ B(x_B, 0)\ \ άρα\ 0 - f(a) = f'(a)(x_B - a)$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x_B - a)$

$\Leftrightarrow a - 1 = x_B - a\ \Leftrightarrow\ x_B = 2a - 1$

$Αρα\ B(2\alpha - 1, 0)\ \ \alpha \le 0$

$X_B(t) = 2a(t) - 1\quad όπου\ t \ge 0$

$X'_B(t) = 2a'(t) = -2\frac{a(t)}{3}\quad όπου\ t \ge 0$

$για\ t = t_o\ \ X'_B(t_o) = -\frac{2}{3}a(t_o) = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3}\ .$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^x + 2x - e$, $D_{f'} = \mathbb{R}$. $f''(x) = e^x + 2$, $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ προφανώς ισχύει $f''(x) > 0$.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα .

Επιπλέον, η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και

- $f'(0) = 1 - e < 0,$
- $f'(1) = 2 > 0.$

Άρα, $f'(0) \cdot f'(1) < 0$. Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$

για την εξίσωση $f'(x) = 0$. Η ρίζα αυτή ειναι μοναδική στο $\mathbb{R}$ αφού η f' είναι γν. αύξουσα .

Τότε:

- για κάθε $x < x_0$, έχουμε:

$$x < x_0 \overset{f' \; γν.αύξουσα}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0.$$

- για κάθε $x > x_0$, έχουμε:

$$x > x_0 \overset{f' \; γν.αύξουσα}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Άρα, για την f έχουμε:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Ακόμη,

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$$

και

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1.$$

Δ2. **<u>1ος τρόπος</u>**

Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} \cdot \left(1 + \big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right)\right]$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, έχουμε:

$$\left|\big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right| \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Άρα,

$$-|f(x) - f(x_0)| \leq \big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(-|f(x) - f(x_0)|\big) = -|f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Επομένως, από Κριτήριο Παρεμβολής,

$$\lim_{x\to x_0}[(f(x)-f(x_0))\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)]=0.$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο x_0.

Άρα, $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$ ισχύει ότι $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$. Εφόσον,

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \quad \text{και} \quad f(x)-f(x_0)>0 \text{ για κάθε } x\neq x_0,$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty.$$

Αφού

$$\lim_{x\to x_0}\left(1+(f(x)-f(x_0))\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=1+0=1,$$

έχουμε ότι το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\cdot\left(1+(f(x)-f(x_0))\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)\right]=+\infty.$$

<u>2ος τρόπος</u>

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο x_0.

Άρα, $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$ ισχύει ότι $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$.

Εχουμε για κάθε $x\neq x_0$: $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq -1\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1$

Εφόσον,

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0 \quad \text{και} \quad f(x)-f(x_0)>0 \text{ για κάθε } x\neq x_0,$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right)=+\infty$$

Άρα απο γνωστή ιδιότητα $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f(x)+x-x_0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

- Η φ είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων).
- $\varphi(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0.$
- $\varphi(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)$. Έχουμε $x_0<1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,1]$. Άρα, $f(x_0)<f(1)\Leftrightarrow f(x_0)<0$. Επομένως, $\varphi(x_0)=f(x_0)<0$.

Συνεπώς, $\varphi(1)\cdot\varphi(x_0)<0$.

Από το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ$\in(x_0,1)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=f'(x)+1$. Για κάθε $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)=0$ (διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα). Άρα, $f'(x)+1>0$ για κάθε $x>x_0$. Συνεπώς, $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0,1)$,

άρα για την εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x=x_0$ η παραπάνω ρίζα ρ είναι μοναδική στο $(x_0,1)$.

Δ4. Έχουμε ότι ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)+x=x_0$ στο διάστημα $(x_0,1)$.

Άρα, $\rho\in(x_0,1)$ και $f(\rho)+\rho=x_0\Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ). Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}.$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$x_0<\xi<\varrho<\kappa\overset{f'}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\varrho)}{x_0-\varrho}<f'(\kappa)\overset{x_0-\varrho<0}{\Rightarrow}f(x_0)-f(\varrho)>(x_0-\varrho)f'(\kappa)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0)-f(\varrho)>f(\varrho)f'(\kappa)\Rightarrow f(x_0)>f(\varrho)+f(\varrho)f'(\kappa)\Rightarrow f(x_0)>f(\varrho)(1+f'(\kappa))$$