ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

16/06/2021

Θέμα Α.

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 153

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4.

α. Σ

β. Λ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Από τη σχέση που μας δίνουν,

$$f(x+1) = (x+1)\cdot e^{-x} \ \ (1)$$

θέτοντας όπου $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$, προκύπτει ότι:

$$f(u) = u \cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ. 1	$\searrow$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Στο $x_0 = 1$, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$.

Επομένως, ισχύει $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Β3. Η συνάρτηση f είναι και δεύτερη φορά παραγωγίσιμη, με

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^{1-x})' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x}(1-x)' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (-1) \\ &= -e^{1-x} \cdot (1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x} \cdot (1-x+1) \\ &= -e^{1-x} \cdot (2-x) \qquad = e^{1-x} \cdot (x-2),\ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		Σ.Κ.	

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2),\ \ x \in \mathbb{R}.$

Λύνουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (x-2) = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (x-2) > 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

Συνεπώς, η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και άρα δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$: Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = e \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = e \cdot 0 = 0.$$

(αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.)

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to+\infty} [x \cdot e^{1-x} - 0 \cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e}{e^x} \underset{DHL}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x \cdot e)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = e \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Άρα, $\lambda = 0$ και $\beta = 0$ και επομένως, η ευθεία $y = 0$ (δηλαδή ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$: Έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x} = e\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = e\cdot(+\infty) = +\infty.$$

(αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, και $e^x > 0$ κοντά στο $-\infty$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x} = +\infty$.)

Άρα, η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Β4. (i) Υπολογίζουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot e}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}[xe\cdot\dfrac{1}{e^x}] = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$, και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, (από το ερώτημα **Β3**).

Συνεπώς,

- στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Άρα,
$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1].$$
- στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Άρα,
$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (0,1),$$
(είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 1$, , αφού η f είναι συνεχής).

Τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]\cup(0,1) = (-\infty, 1].$$

Άρα, $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$.

(ii)

λ	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Πλήθος ριζών		1	1	2	1	0	

- Για $\lambda < 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $\lambda = 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 ρίζες.
- Για $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.
- Για $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζες.

Β4. (ii) (<u>Δεύτερος τρόπος</u>)

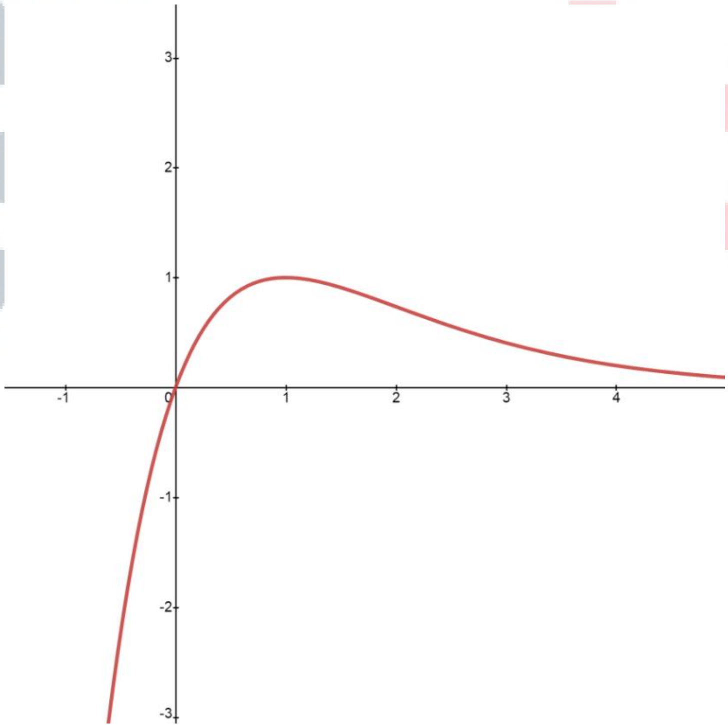
Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1 Ο.Μ	$\searrow$	Σ.Κ 2/e	$\searrow$	0

Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1]$.

- Αν $\lambda \leq 0$, τότε η C_f με την $y = \lambda$τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
- Αν $0 < \lambda < 1$, τότε η C_f με την $y = \lambda$ τέμνονται σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.
- Αν $\lambda > 1$, τότε η C_f με την $y = \lambda$ δεν έχουν κοινά σημεία, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

Θέμα Γ.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1 \ , & x \le 0 \\ συνx \ , & 0 < x \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \qquad a < -3$$

Γ1.

f συνεχής για $x < 0$ ως πολυωνυμική
f συνεχής για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} συνx = συν0 = 1$
$f(0) = 1$
Αρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f$ συνεχής στο $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} =$$
$$\lim_{x\to 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1 \qquad (1)$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{συνx - 1}{x} = 0 \qquad (2)$$
Αρα απο (1) και (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
Αρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
Επομένως η f δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$

Γ2.

(i) f συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ αρα η f συνεχής στο $\left[o, \frac{3\pi}{2}\right]$
f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική
$f(0) = 1$
$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = συν\dfrac{3\pi}{2} = 0$
Αρα $f(0) \neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$
Αρα δεν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle
(ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ $f'(x) = -ημx$
$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -ημ\xi = 0 \Leftrightarrow ημ\xi = ημ0 \Leftrightarrow \xi = \pi$ αφού $x \epsilon \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Γ3.

Για x<0

$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

(ε) $\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta$ $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta$ $\sigma\tau o\nu$ $x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0 \quad (1)$

$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3+\alpha) < 0$

$\alpha < -3 \quad \Leftrightarrow \alpha + 3 < 0$

Αρα η (1) αδύνατη

Επομένως δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη // στον x'x

Γ4.

Για x<0

$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\epsilon(-\infty, 0) \qquad\qquad (\Delta < 0)$

$\Gamma\iota\alpha\ x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right] \quad f'(x) = -\eta\mu x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \quad \Leftrightarrow x = \pi$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x > 0 \quad \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \overset{x\epsilon\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]}{\Longleftrightarrow} x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$ $+\infty$
f'(x)	−	−	○ +	
f(x)	↘	↘	↗	

f συνεχής στο x=0 f γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0] , [0,π] αρα f γνησίως φθίνουσα στο

(-∞,π] και f γνησίως αύξουσα στο [π, $\frac{3\pi}{2}$]

Η f παρουσιάζει στο x=π ολικό ελάχιστο το f(π)=συνπ=-1

$A\rho\alpha \quad f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1 \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\epsilon\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

Θέμα Δ.

Δ1 Θεωρώ τη συνάρτηση:

$$\Lambda(x) = lnx - \frac{1}{x} \quad ,x > 0$$

$$\Lambda'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad ,x > 0$$

$\text{Έχουμε ότι } \Lambda'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$

$\text{Επομένως } \Lambda \text{ γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty)$

$\text{Αρα η εξίσωση } \Lambda(x) = 0 \text{ έχει μία το πολύ ρίζα στο } (0, +\infty) \qquad (*)$

$\Lambda \text{ συνεχής στο } [1, e] \text{ πράξεις συνεχών συναρτήσεων}$

$\Lambda(1) = -1 < 0$

$$\Lambda(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

$\Lambda(1)\Lambda(e) < 0 \quad \text{αρα απο θεώρημα Bolzano η εξίσωση } \Lambda(x) = 0$

$\text{έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (1, e) \subseteq (0, +\infty) \qquad (**)$

$$\text{Αρα απο } (*) \text{και } (**) \text{ υπάρχει μοναδικό } x_0 \in (0, +\infty)$$

$$\big(\text{το οποίο μάλιστα ανήκει στο } (1, e)\big), \text{ώστε } \Lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$$

Δ2. Έχουμε:

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1, \qquad x > 0$$

$$\overset{(\Delta 1)}{\Longleftrightarrow} f(x) = \frac{1}{x_0}(x+1) - \ln x - 1, \qquad x > 0$$

Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για $x > 0$, έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x_0 x}.$$

Για $x > 0$, λύνουμε

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_0 \cdot x} > 0 \xLeftrightarrow{x_0 \cdot x > 0} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0.$

x	-∞ 0		x_0	+∞
f΄(x)		—	0	+
f(x)		↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x = x_0$, το $f(x_0) = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = 0$ (διότι, από Δ1, έχουμε $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$).

Άρα,

$$f(x) \geq f(0) = 0, \;\; για\ κάθε\ x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0$.

Δ3. Έχουμε $g(x) = xe^{-x}$, $\;D_g = \mathbb{R}$, με

$$g'(x) = e^{-x}(1-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, με

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το κοινό σημείο των C_f, C_h έχει τετμημένη τη ρίζα της εξίσωσης:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, \quad για \;\; x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Αφού $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει $x \cdot e^{-x} > 0 \overset{e^{-x}>0}{\Longleftrightarrow} x > 0$. Για $x > 0$,

$$\begin{aligned}(5) &\Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow \ln x - x \\ &= (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - (x+1) \\ &\Leftrightarrow \ln x - (x+1)\ln x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x = x_0.\end{aligned}$$

Άρα, οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο x_0. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0, αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x_0) = h'(x_0)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}g'(x_0) = h'(x_0) &\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} \\ &= \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow e^{-x_0} - g(x_0) \\ &= h(x_0)\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \overset{g(x_0)=h(x_0)}{\Longleftrightarrow} e^{-x_0} - h(x_0) = \frac{h(x_0)}{x_0} - h(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} \\ &= \frac{h(x_0)}{x_0} \Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = h(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) = h(x_0),\end{aligned}$$

που ισχύει.

Άρα, οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Δ4.
Για κάθε x∈ $(0, +\infty)$ η απόσταση των σημείων A(x, f(x)) , B(x,f(x)) δίνεται από τη συνάρτηση d(x) = |f(x)-φ(x)| = f(x) – φ(x) , x>0 (αφου f(x)>φ(x) για κάθε x>0)
Διακρίνω τις περιπτώσεις:
(α) Αν η φ παραγωγίσιμη στο x_0 (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$d'(x_o) = f'(x_o) – φ'(x_o) = 0 – φ'(x_o) = - φ'(x_o)$ (απο Δ1 ερώτημα)
Το x_o εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$
Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o
Αρα απο θεώρημα Fermat θα έχουμε ότι: $d'(x_o)=0 \Leftrightarrow - φ'(x_o) = 0 \Leftrightarrow φ'(x_o) = 0$
και άρα x_o κρίσιμο σημείο της φ
(β) Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε το x_o κρίσιμο σημείο της φ επομένως
απο (α) και (β) προκύπτει ότι σε κάθε περίπτωση το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.