

06/06/2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \quad D_{f \circ g} : \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ \sqrt{x} \in (-\infty, 1] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases} \quad \text{Άρα } x \in [0, 1]$$

Επομένως, $D_h = [0, 1]$

$$\text{Είναι } f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

$$\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = ((\sqrt{x})^2 - 1)^2 = (x - 1)^2$$

$$\text{Άρα } h(x) = (x - 1)^2, D_h = [0, 1]$$

$$B2. \quad h'(x) = 2(x - 1), x \in [0, 1]$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ αδύνατο}$$

$$\text{Άρα } h'(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$			-	
h				

Άρα $h \searrow [0,1]$, 1-1, άρα αντιστρέφεται

$$D_{h^{-1}} = h([0,1]) \stackrel{\text{συνεχής}}{=} [h(1), h(0)] = [0,1] \quad \text{φθιν.}$$

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1| \stackrel{x \in [0,1]}{\Leftrightarrow} \sqrt{y} = -x+1 \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$$

$$\text{Άρα : } h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, D_{h^{-1}} = [0,1]$$

$$B3. \quad \phi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

i)

- Η ϕ : συνεχής στο $[0,1)$ ως πηλίκο και διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{και } \phi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) = \phi(1), \text{ όποτε η } \phi \text{ συνεχής στο } x_0 = 1$$

Άρα η ϕ συνεχής στο $[0,1]$

- $\phi(0) = 1$
 $\phi(1) = \frac{1}{2}$ άρα $\phi(0) \neq \phi(1)$

οπότε η ϕ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο $[0,1]$

ii)

- αφού $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\eta\mu x \uparrow \text{στο } (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})} \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0)$
- Από Θ.Ε.Τ. για κάθε αριθμό $\eta\mu \alpha$, με $\varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0)$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$

Β' τρόπος

ii) Θα δείξω ότι η εξίσωση $\phi(x) - \eta\mu \alpha = 0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

Θεωρώ $\kappa(x) = \phi(x) - \eta\mu \alpha$, $x \in [0,1]$

• κ συνεχής $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών

• $\kappa(0) = \phi(0) - \eta\mu \alpha = 1 - \eta\mu \alpha > 0$

$$\kappa(1) = \phi(1) - \eta\mu \alpha = \frac{1}{2} - \eta\mu \alpha < 0$$

$$\text{Αφού } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\eta\mu x \uparrow \text{στο } (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})} \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1$$

Άρα $\kappa(0)\kappa(1) < 0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\kappa(x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(x_0) - \eta\mu \alpha = 0$.

Γ' τρόπος

Θα δείξω ότι η εξίσωση $\phi(x) = \eta\mu \alpha \Leftrightarrow \phi(x) - \eta\mu \alpha = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

Θεωρώ $\kappa(x) = \phi(x) - \eta\mu \alpha$, $x \in (0, 1)$

$$\kappa'(x) = \varphi'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)' = \frac{-x-1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)^2} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(1-x)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, 1),$$

Άρα $\kappa \downarrow (0,1)$

Οπότε $\kappa((0,1)) \stackrel{\text{συνεχής}}{=} \stackrel{\text{φθιν.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 1^-} \kappa(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa(x)) = (\frac{1}{2} - \eta\mu \alpha, 1 - \eta\mu \alpha)$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\varphi(x) - \eta\mu \alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} - \eta\mu \alpha\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} - \eta\mu \alpha\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(1-x)}{(1-x)(1+\sqrt{x})} - \eta\mu \alpha\right) = \frac{1}{2} - \eta\mu \alpha, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\varphi(x) - \eta\mu \alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} - \eta\mu \alpha\right) = 1 - \eta\mu \alpha$$

$$\text{Όμως } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu\alpha \uparrow (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$$

$$\bullet \eta\mu\alpha < 1 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu\alpha > 0$$

$$\bullet \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \eta\mu\alpha < 0$$

Οπότε η κ είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο $(0,1)$ και

$$0 \in \kappa((0,1)) = (\frac{1}{2} - \eta\mu\alpha, 1 - \eta\mu\alpha),$$

Άρα η εξίσωση $\kappa(x) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = \eta\mu\alpha$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Για } x < -1 \quad f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$$

$$\text{από συνέπειες Θ.Μ.Τ. } f(x) = -2x + c_1 \quad (1)$$

$$\text{Για } x > -1 \quad f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$$

$$\text{από συνέπειες Θ.Μ.Τ. } f(x) = x^3 - x + c_2 \quad (2)$$

$$\text{Η } C_f \text{ διέρχεται από το } O(0,0) \text{ άρα } f(0) = 0$$

$$(2) \xrightarrow{x=0} f(0) = 0^3 - 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ a, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

$$f \text{ συνεχής στο } x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = a \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 = a \Leftrightarrow$$

$$a = 0 \text{ και } c_1 = -2$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$(\epsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

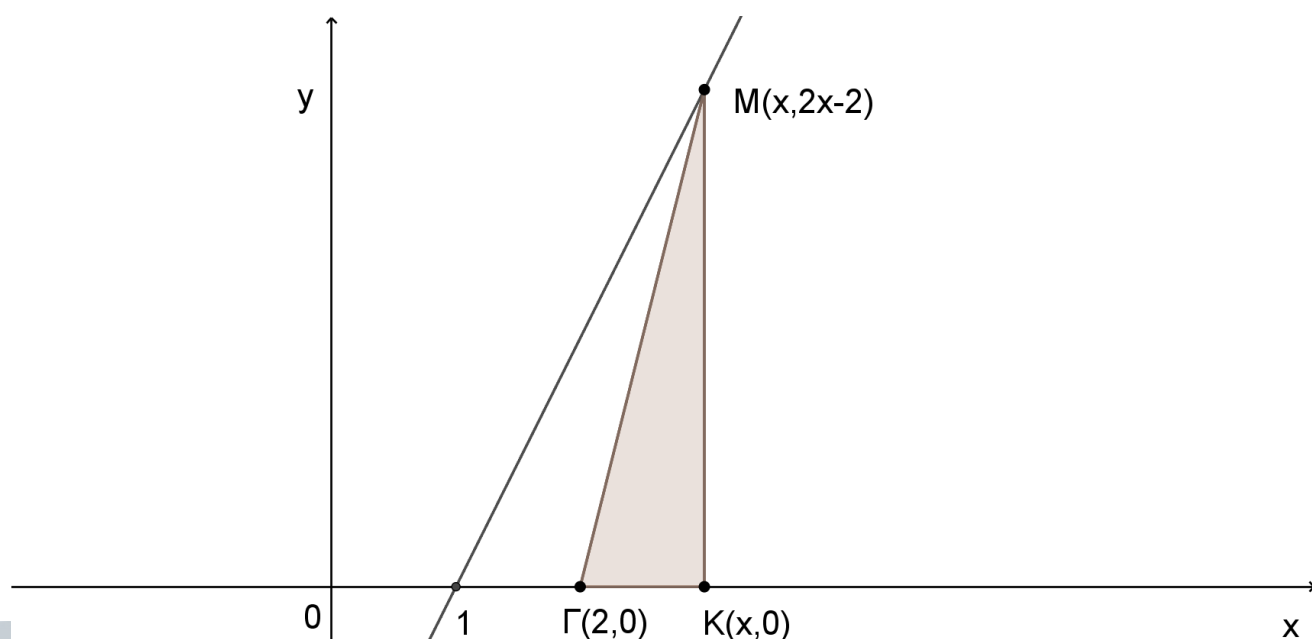
Η (ϵ) διέρχεται από το $(0, -2)$

$$(1) \xrightarrow{x=0, y=-2} -2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \xLeftrightarrow{x_0 > -1}$$

$$-2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow$$

$$2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ (δεκτή)}$$

Γ3.



$$x > 2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow 2x - 2 > 2 > 0$$

Τη χρονική στιγμή t_0 το M διέρχεται από το B(3,4) άρα $x(t_0) = 3$,

$$y(t_0) = 4 \text{ και } x'(t_0) = 2 \text{ μονάδες/sec}$$

$$(MK\Gamma) = \frac{1}{2}(K\Gamma)(MK) = \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

$$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2, \quad t \geq 0$$

$$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t), \quad t \geq 0$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 \text{ τετρ. μονάδες/sec}$$

Γ4. $\left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$ άρα

$$-\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2x} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \left| \frac{1}{f(x)} \right| \right) = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2) \text{ κ.π.}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = 0$$

$$\text{Υπολογίζουμε το: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$$

$$\text{Θέτουμε } -x = u \Leftrightarrow x = -u \quad \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$\text{Άρα το όριο } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \text{ γράφεται: } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} =$$

$$0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

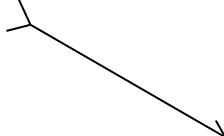
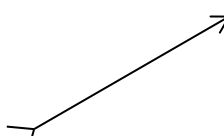
Δ1. i.) Η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(3 \cdot x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\text{παράγωγο τη } f'(x) = 1 - \frac{1}{3 \cdot x} (3 \cdot x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

$$\text{Ελέγχουμε τότε } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Αντίστοιχα } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 ⁺
F			

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ και είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(0, 1]$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3 \cdot x)) \stackrel{0-(-\infty)}{=} +\infty, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3 \cdot x) \stackrel{3 \cdot x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3 \cdot x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \left(1 - \frac{\ln(3 \cdot x)}{x} \right) \right)^{+\infty \cdot (1-0)} = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3 \cdot x)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, άρα

$$f((0, 1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty). \text{ Το } 0 \in f((0, 1]) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ έτσι ώστε $f(x_1) = 0$, $x_1 \neq 1$ γιατί $f(1) = 1 - \ln 3$. Το x_1 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα $f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1 - \ln 3, +\infty)$.

Το $0 \in f((1, +\infty)) = (1 - \ln 3, +\infty)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ έτσι ώστε $f(x_2) = 0$. Το x_2 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 < 1 < x_2$.

- Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2) . Εφόσον $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ τότε και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Συνεπώς $f(x) \leq 0$ στο $[x_1, x_2]$, άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} x - \ln(3 \cdot x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3 \cdot x) - x dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3 \cdot x) - x dx = \int_{x_1}^{x_2} \ln(3 \cdot x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (x)' \cdot \ln(3 \cdot x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \left[x \cdot \ln(3 \cdot x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{3 \cdot x} \cdot 3 dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_2 \cdot \ln(3 \cdot x_2) - x_1 \cdot \ln(3 \cdot x_1) - [x]_{x_1}^{x_2} - \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \right) = \\
&= x_2 \cdot \ln(3 \cdot x_2) - x_1 \cdot \ln(3 \cdot x_1) - x_2 + x_1 - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} \stackrel{x_2 = \ln(3 \cdot x_2)}{=} \stackrel{x_1 = \ln(3 \cdot x_1)}{=} \\
&= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = (x_2 - x_1) \cdot \left[(x_2 + x_1) - 1 - \frac{x_2 + x_1}{2} \right] = \\
&= (x_2 - x_1) \cdot \left(\frac{x_2 + x_1 - 2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1 - 2)
\end{aligned}$$

Δ3. Ισχύει ότι $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow -1 < -x_1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2 - x_1 < 2$

Αρκεί να δείξουμε ότι $2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2 < x_2 + x_1$

(Αφού $f(x) < 0$ στο (x_1, x_2) από Δ2).

$$\begin{aligned}
\text{Όμως } E > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 + x_1 - 2) > 0 \stackrel{\frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0}{\Leftrightarrow} x_2 + x_1 - 2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x_2 + x_1 > 2.
\end{aligned}$$

Δ4. Για κάθε $x > 0$

$$2 \cdot f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f(x) = f(1) + f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(1) + f(x) - f'(x_2) \cdot (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(x) - f(1)] + [f(x) - f'(x_2) \cdot (x - x_2) - f(x_2)] = 0 \quad \underline{(1)}$$

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)$, συνεπώς

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. (2)

- Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο x_2 είναι η

$$(\varepsilon): y - f(x_2) = f'(x_2) \cdot (x - x_2) \Leftrightarrow (\varepsilon): y = f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2).$$

Ακόμη η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, συνεπώς η Cf θα βρίσκεται ολόκληρη πάνω από την (ε) εξαιρουμένου του σημείου επαφής, άρα

$$f(x) \geq f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow f(x) - [f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2)] \geq 0,$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$. **(3)**

Συνεπώς από **(2)** και **(3)** η **(1)** γίνεται

$$\begin{cases} f(x) - f(1) = 0 \\ f(x) - [f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = x_2 \end{cases} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

αφού $x_2 \neq 1$. Άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

