ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

06/06/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 111

Α2. Σχολικό σελ. 104

Α3. Σχολικό σελ. 128

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{goh} = \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} = \begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases}$, άρα $D_{goh} = (0, +\infty)$

$goh(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x}$, οπότε :

$f(x) = \frac{4-x^2}{x}$, $x > 0$

Β2. i) f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή

$f'(x) = \frac{(4-x^2)'\,x-(4-x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα $f \downarrow (0, +\infty)$

ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Longleftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{\pi} > \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$ ισχύει

B3. • Κατακόρυφες Ασύμπτωτες :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} [(4-x^2) \cdot \frac{1}{x}] = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$,

άρα η x = 0 (ή y'y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Πλάγιες – Οριζόντιες ασύμπτωτες : y = λx + β

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$, άρα λ = – 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{4-x^2}{x} + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$, άρα

β = 0

Οπότε η y = – x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο + ∞.

B4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$

• Έχουμε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$,

Οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Κοντά στο +∞ : $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|}$, άρα :

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{|f(x)|}) = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{|f(x)|}) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+ax)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3+a\cdot\frac{3^2}{2}-\left(2+a\frac{2^2}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$3+\frac{9a}{2}-2-2a = 1 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Γ2. i) $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \ \text{άρα}\ f'(1) = -1$$

Επομένως ορίζεται η εφαπτομένη της C_f *στο* $x_0 = 1$

ii) (ε): $y-f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x+2$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$.

Άρα $f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow -1 = \varepsilon\varphi\omega \overset{\omega\in[0,\pi)}{\Longleftrightarrow} \omega = \frac{3\pi}{4} rad$

Γ3. Για $x<1$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x-3$

Για $x>1$ η f παραγωγίσιμη ως ρητή με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Για $x=1$ η f παραγωγίσιμη με $f'(1) = -1$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{αν } x<1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

Για κάθε $x \geq 1$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

$Για\ κάθε\ x < 1 \quad \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0$ ⇔ f΄(x) < 0

Άρα f΄(x) < 0 για κάθε x∈ℝ

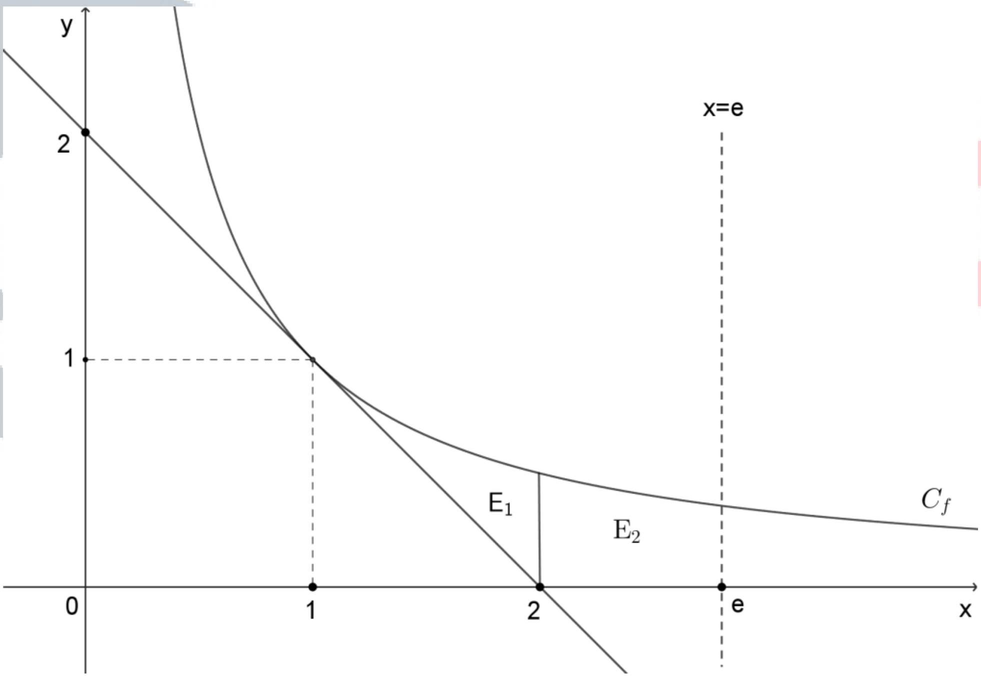
Οπότε f↓ ℝ

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο ℝ

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

Γ4.



$$E = E_1 + E_2 = \int_1^2 f(x) - (-x + 2)\, dx + \int_2^e f(x) =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [l\,\mathrm{n}|x|]_2^e =$$

$$\ln 2 + 2 - 4 - \left(ln1 + \frac{1}{2} - 2\right) + (lne - ln2) =$$

$$ln2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 + 1 - ln2 = \frac{1}{2} \tau.\mu o\nu.$$

ΘΕΜΑ Δ

$D_f = (0,2)$

Δ1. Θεωρώ $A(x) = \dfrac{f(x)-2x}{x-1}$, $D_A = (0,1)U(1,2)$ με $\lim\limits_{x\to 1} A(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Οπότε $f(x) = (x-1)A(x) + 2x$

Η f είναι συνεχής ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 0\cdot \ell + 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3$$

Δ2. Τότε $f(x) = \ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3$, $x\in(0,2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)} \quad , \ x\in(0,2)$$

Για $x\in(0,2)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (δεκτή) ή $x = -2$ (απορ.)

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	2	$+\infty$
x^2+x-2			$-$	0	$+$		
x^2			$+$		$+$		
$x-2$			$-$		$-$		
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$		

Ο.Μ

$f(1) = 2$

· $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3) = \ln 2 + (-\infty) + 3 = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2-x) \overset{u=2-x}{\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}(2-x)=2}{=}} \lim\limits_{u\to 2} \ln u = \ln 2$

· $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}[\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3] = (-\infty) - \dfrac{1}{2} + 3 = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(2-x) \overset{\text{για } x<2 \ u = 2-x}{\underset{\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=0}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

Θεωρώ τα διαστήματα $\Delta_1 = (0,1)$ και $\Delta_2 = [1, +\infty)$

$$f(\Delta_1) \underset{f\ \text{συνεχής}}{\overset{f\uparrow\Delta_1}{=}} \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

$$f(\Delta_2) \underset{f\ \text{συνεχής}}{\overset{f\downarrow\Delta_2}{=}} (\lim_{x\to\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in f(\Delta_1) \\ f\uparrow\Delta_1 \end{array}\right\} \text{άρα υπάρχει μοναδικό } x_1 \in \Delta_1 \quad \text{με} \quad f(x_1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in f(\Delta_2) \\ f\downarrow\Delta_2 \end{array}\right\} \text{άρα υπάρχει μοναδικό } x_2 \in \Delta_2 \quad \text{με} \quad f(x_2) = 0$$

($x_2 \neq 1$ αφού $f(x_2) = 0$ και $f(1) = 2$)

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες

Έχουμε x_1 , $\frac{1}{3} \in \Delta_1$

Έστω $x_1 \geq \frac{1}{3} \overset{f\uparrow\Delta_1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \geq \ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow \ln 1 \geq \ln\frac{5}{3} \overset{\ln x\uparrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} 1 \geq \frac{5}{3}$ άτοπο

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3.

f *συνεχής στο* $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

f *παραγωγίσιμη στο* $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ *με* $f'(\xi) = \dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1}$

$$\Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} \;, \qquad D_{f''} = (0,2)$$

Για κάθε $x \in (0,2)$: $-\frac{1}{(2-x)^2} < 0 \,, -\frac{2}{x^3} < 0$ *άρα* $f''(x) < 0$

αρα $f' \downarrow (0,2)$ *άρα η εξίσωση* $f'(x) = \dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x}$ *έχει το πολύ μία ρίζα*

Δ4. i) Αφού F, G αρχικές της f στο (0,2) τότε (από γνωστό θεώρημα) υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, ώστε $F(x) = G(x) + c$, για κάθε $x \in (0,2)$.

Άρα $F(x_2) = G(x_2) + c \overset{G(x_2)=0}{\Longleftrightarrow} c = F(x_2)$

$F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) = -c$

Άρα $F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$

Άρα $F(x) = G(x) + F(x_2) \Leftrightarrow G(x) = F(x) - F(x_2)$, $x \in (0,2)$

ii) Αφού F αρχική της f στο (0,2) , τότε $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in (0,2)$

Έχουμε : $f(x) \neq 0$ στο (x_1, x_2)

f συνεχής στο (x_1, x_2), άρα η f διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2)

$f(1) = 2 > 0$ άρα $f(x) > 0$ στο (x_1, x_2).

F συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως παραγωγίσιμη, άρα $F\uparrow[x_1, x_2]$.

$x_1 < x_2 \xRightarrow{F\uparrow[x_1,x_2]} F(x_1) < F(x_2) \overset{F(x_1)=0}{\Longleftrightarrow} 0 < F(x_2)$

Θεωρώ τη συνάρτηση

$B(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) + 2x - x_1 - x_2$, $x \in [x_1, x_2]$.

$B(x) = x_1 F(x) + x_2[F(x) - F(x_2)] + 2x - x_1 - x_2$

- B συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $B(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2[F(x_1) - F(x_2)] + 2x_1 - x_1 - x_2 = -x_2F(x_2) + (x_1 - x_2) < 0$

(Αφού $x_2 > 0$ και $F(x_2) > 0$ και $x_1 < x_2$, άρα: $-x_2F(x_2) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$)

- $B(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2[F(x_2) - F(x_2)] + 2x_2 - x_1 - x_2 = x_1F(x_2) + (x_2 - x_1) > 0$

(Αφού $x_1 > 0$ και $F(x_2) > 0$ και $x_2 > x_1$, άρα : $x_1F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$)

Άρα $B(x_1)B(x_2) < 0$ και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$B(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) (1)

Η B είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $B'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 = (x_1+x_2)f(x) + 2 > 0$ για κάθε

$x \in (x_1, x_2)$ αφού ($x_1+x_2 > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και $2 > 0$)

Άρα B↑ (x_1, x_2). Άρα η εξίσωση $B(x) = 0$ έχει μια το πολύ ρίζα στο (x_1, x_2) (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι η εξίσωση $B(x)=0 \Longleftrightarrow$

$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (x_1, x_2).