ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

02/06/2025

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Σχολικό σελ. 186

Α2. Σχολικό σελ. 76

Α3. Σχολικό σελ. 161

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1.

$f(x) = x^3 + αx^2 + 9x - 3$, $α \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 1$ εσωτερικό του $\mathbb{R}$

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$

f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(x) = 3x^2 + 2αx + 9$, $x \in \mathbb{R}$

Άρα από θεώρημα Fermat $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2α + 9 = 0 \Leftrightarrow 2α + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$α = -6$.

Έχουμε : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $x \in \mathbb{R}$

Λύνω : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ή $x_2 = 3$

Λύνω $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Άρα για α = – 6 η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$

Β2. Έστω τα διαστήματα $\Delta_1 = (0, 1)$, $\Delta_2 = [1, 3]$, $\Delta_3 = (3, +\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{f\ \text{συν.}}{=} f(0) = -3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \overset{f\ \text{συν.}}{=} f(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \overset{f\ \text{συν.}}{=} f(3) = -3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -3$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$$

Άρα $f(\Delta_1) \underset{\text{συν.}}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-3, 1)$

$f(\Delta_2) \underset{\text{συν.}}{\overset{f\downarrow}{=}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

$f(\Delta_3) \underset{\text{συν.}}{\overset{f\uparrow}{=}} \left(\lim_{x\to 3^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-3, +\infty)$

Οπότε :

$0 \in f(\Delta_1)$, f συνεχής και f ↑ στο $(-\infty,1)$, άρα η f(x) = 0 έχει μια ακριβώς ρίζα $x_1 \in \Delta_1 = (0, 1) \subseteq (-\infty,1)$, άρα η x_1 είναι θετική ρίζα

$0 \in f(\Delta_2)$, f συνεχής και f ↓ στο Δ_2, άρα η f(x) = 0 έχει μια ακριβώς ρίζα $x_2 \in \Delta_2 = [1, 3]$, άρα η x_2 είναι θετική ρίζα

$0 \in f(\Delta_3)$, f συνεχής και f ↑ στο Δ_3, άρα η f(x) = 0 έχει μια ακριβώς ρίζα $x_3 \in \Delta_3 = (3, +\infty)$, άρα η x_3 είναι θετική ρίζα

Άρα η f(x) = 0 έχει 3 θετικές ρίζες.

B΄τρόπος για το πρόσημο της x_1 :

Παίρνουμε $\Delta_1 = (-\infty, 1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x - 3) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Άρα : $f(\Delta_1) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^-} f(x)) = (-\infty, 1)$,

$0 \in f(\Delta_1)$, f συνεχής και f ↑ στο Δ_1, άρα η f(x) = 0 έχει μια ακριβώς ρίζα x_1

$\in \Delta_1 = (-\infty, 1)$.

f συνεχής στο [0, 1]

f(0) = – 3

f(1) = 1

f(0)f(1) = – 3 < 0, άρα από θεώρημα Bolzano η f(x) = 0 έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1). Γενικεύοντας η f(x) = 0 έχει μια ακριβώς

ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ με x_1 θετική.

B3. $f''(x) = 6x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

Λύνω $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Λύνω $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	-∞	2	+∞
f΄΄(x)	–	0	+
f(x)	↷		↺

f ↷ (-∞, 2], f ↺ [2,+∞)

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο 2, το (2, f(2)) = (2, – 1)

B4.

$g(x) = x + f(x) = x + x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \Leftrightarrow g(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

με $g'(x) = 3x^2 - 12x + 10$, $x \in \mathbb{R}$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi , f(\xi))$ είναι

(ε_1) : $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$

$\Leftrightarrow y - f(\xi) = f'(\xi)x - \xi f'(\xi)$

$\Leftrightarrow y = f'(\xi)x - \xi f'(\xi) + f(\xi)$

$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 9)x - \xi(3\xi^2 - 12\xi + 9) + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3$

$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 9)x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

Η (ε_1) τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$: $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

άρα $M(0 , -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi , f(\xi))$ είναι

(ε_2) : $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$

$\Leftrightarrow y = g'(\xi)x - g'(\xi)\xi + g(\xi)$

$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 10)x - \xi(3\xi^2 - 12\xi + 10) + \xi^3 - 6\xi^2 + 10\xi - 3$

$\Leftrightarrow y = (3\xi^2 - 12\xi + 10)x - 2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

Η (ε_2) τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$: $y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3$

άρα $M(0 , -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$

Οπότε οι εφαπτομένες (ε_1) , (ε_2) των C_f , C_g στα A , B αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$ στο $M(0 , -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\Delta\acute{\iota}\nu\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ f(x) = \begin{cases} e^x\eta\mu x, x < 0 \\ \sqrt{x^2+x}\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x^2+x} = \sqrt{0^2+0} = 0$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^x\eta\mu x = e^0\eta\mu 0 = 1\cdot 0 = 0$$
$$f(0) = 0$$
$$\text{Άρα αφού: } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0), \qquad \text{τότε } f \text{ συνεχής στο } 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$
$$\text{Αφού, } \lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x}) = 1 + \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = 1 + (+\infty) = +\infty$$
$$\text{'Αρα η } f \text{ δεν ειναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0\,.$$

Γ2.

Η f είναι συνεχής στο x=0.

Επιπλέον, f συνεχής για x>0 ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και για x<0 συνεχής ως γινόμενο συνεχών. Επομένως f συνεχής στο ℝ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Έστω y=λx+β ασύμπτωτη της Cf στο +∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{1+0} = 1 \in \mathbb{R}, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lambda = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} =$$
$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \beta = \frac{1}{2}, \qquad \text{επομένως η ευθεία } y = x + \frac{1}{2} \text{ ειναι}$$
$$\text{πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty$$

Έστω y=λx+β ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0\cdot 0=0$$

$$A\varphi o\upsilon\ |\eta\mu x|\leq 1\Leftrightarrow\frac{|\eta\mu x|}{|x|}=\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\,,\qquad \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{|x|}=\lim_{x\to}\frac{1}{|x|}=0$$

$$'A\rho\alpha\ \alpha\pi\acute{o}\ K\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \Pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \lambda=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}e^{x}\eta\mu x=0$$

$$A\varphi o\acute{\upsilon},|\eta\mu x|\leq 1\Leftrightarrow|e^{x}||\eta\mu x|\leq|e^{x}|$$

$$-|e^{x}|\leq e^{x}\eta\mu x\leq|e^{x}|$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lim_{x\to-\infty}|e^{x}|=\lim_{x\to-\infty}-|e^{x}|=0$$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \alpha\pi\acute{o}\ K\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \Pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma\ \lim_{x\to-\infty}e^{x}\eta\mu x=0$$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \beta=0$$

Επομένως η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$

Γ3.

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x}\eta\mu x=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x}\eta\mu x-x-\frac{1}{2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-π,0).

Θεωρούμε συνάρτηση $K(x)=e^{x}\eta\mu x-x-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

Η Κ συνεχής στο [-π,0] ως γινόμενο και γινόμενο και διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$K(0)=e^{0}\eta\mu 0-0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$$

$$K(-\pi)=e^{-\pi}\eta\mu(-\pi)+\pi-\frac{1}{2}=\pi-\frac{1}{2}>0$$

άρα K(0)K(-π) <0

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano , άρα η εξίσωση

$K(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi\in(-\pi,0)$

Γ4.

Τη χρονική στιγμή t είναι x=x(t) και y=y(t).

$Το\ σημείο\ M\big(x(t), y(t)\big)\ ανήκει\ στην\ C_f\ με\ x(t) \geq 0,$

$άρα\ y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}, t \geq 0$

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)' = \frac{\big(x^2(t) + x(t)\big)'}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} =$$

$$\frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}, t \geq 0$$

$Για\ t = t_0, \quad y'(t_0) = x'(t_o)$

$$y'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$x'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \overset{x'(t_o)>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$1 = \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1$$

$Έχουμε\ x(t_o) \geq 0\ άρα:$

$$\left(2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}\right)^2 = (2x(t_0) + 1)^2$$

$$4\big(x^2(t_0) + x(t_0)\big) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1$$

$$0 = 1,$$

$Άρα\ δεν\ υπάρχει\ χρονική\ στιγμή\ t_0 τέτοια\ ώστε\ y'(t_0) = x'(t_0)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Η g συνεχής στο (0 , +∞) και ισοδύναμα ισχύει

$$x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \quad , \quad x > 0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$g'(x) = \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)\left(e^{\ln^2 x}\right)'}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2} = \frac{f(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} \cdot 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}}{\left(e^{\ln^2 x}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{\ln^2 x}(xf(x) - 2F(x)\ln x)}{x\left(e^{\ln^2 x}\right)^2} = 0 \quad , \quad x > 0$$

Άρα η g σταθερή στο (0, +∞)

Δ2. i)

Για x = 1 η δοθείσα ισότητα γίνεται

$1\cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ συνεπώς

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} \quad (1)$$

- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\underset{\text{στο } x=1}{\overset{f\text{ παραγ.}}{=}}f'(1)=2$

εφόσον η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x$

- $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$

Άρα η (1) γίνεται: $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}}=\frac{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}}{\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}}=\frac{2}{1}=2$

ii) Η δοθείσα για $x \neq 1$ γίνεται $F(x)=\frac{xf(x)}{2\ln x}$

Η F είναι συνεχής στο $x_o = 1$, άρα

$F(1) = \lim_{x\to 1}F(x)=\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)}{2\ln x}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{f(x)}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

<u>εναλλακτικά</u>

Η δοθείσα για x=1 γίνεται $1\cdot f(1) = 2F(1)\ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$

Αφου f, F παραγώγισιμες στο $(0, +\infty)$, παραγώγιζοντας την δοθείσα

$$xf'(x) + f(x) = 2f(x)\ln x + 2F(x)\frac{1}{x} \quad , \ x > 0$$

Για $x = 1$: $f'(1) + f(1) = 2F(1) \Leftrightarrow 2 + 0 = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1$

Αφού η g σταθερή στο $(0,+\infty)$ άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε

$g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}}=c$, για $x > 0$

Για $x = 1$ $\frac{F(1)}{1^{\ln 1}}=c \Leftrightarrow c=F(1)=1$

Τελικά $\frac{F(x)}{x^{\ln x}}=1 \Leftrightarrow F(x)=x^{\ln x}$ για κάθε x>0

Δ3.

$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$, x > 0

$F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}$, x > 0

$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	-∞	0		1		+∞
F'(x)			-	0	+	
F(x)			↘		↗	

Άρα F ↘ (0, 1] και F↗ [1,+∞),

Η F παρουσιάζει ελάχιστο το F(1) = 1.

Ακόμη :

$0 < x < 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x^2 < x \overset{F\downarrow(0,1]}{\Longleftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$

Για x = 1 , $F(1^2) - F(1) + (1-1)^2 = 0$

Για x > 1 $\overset{x>0}{\Longrightarrow} x^2 > x \overset{F\uparrow[1,+\infty)}{\Longleftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$

Άρα η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$, x > 0 έχει μοναδική λύση τη x = 1.

Δ4.

$Ισχύει\ ότι\ e^x \geq x+1, x \in \mathbb{R}$

$(και\ η\ ισοτότητα\ ισχύει\ μόνο\ για\ x=1)$

$Αντικαθιστούμε\ όπου\ x\ το\ \ln^2 x\ \ και\ έχουμε:$

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1\ (1) για\ κάθε\ x>0$

$με\ την\ ισότητα\ να\ ισχύει\ για\ x=1$

$Η\ F\ είναι\ συνεχής\ στο\ [1,e]$

$και\ F(x)=e^{\ln^2 x}>0\ για\ κάθε\ x \in [1,e]$

$Συνεπώς\ το\ ζητούμενο\ εμβδαδό,$

$$είναι\ το\ E=\int_1^e |F(x)|dx=\int_1^e F(x)dx$$

$Ολοκληρώνοντας\ την\ (1) έχουμε:$

$$\int_1^e e^{\ln^2 x}dx > \int_1^e (\ln^2 x+1)dx \Leftrightarrow$$

$$E>\int_1^e (x)'(ln^2 x+1)dx \Leftrightarrow$$

$$E>[x(\ln^2 x+1)]_1^e - \int_1^e x2lnx \cdot \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E>2e-1-2\int_1^e lnx\ dx \Leftrightarrow$$

$$E>2e-1-2[xlnx-x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$E>2e-1-2(0+1) \Leftrightarrow$$

$$E>2e-3$$