

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

03/06/2026

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 133

A2. Σχολικό σελ. 51

A3. Σχολικό σελ. 185

A4. α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Πεδίο ορισμού

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

άρα $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln \sqrt{x-2}^2 = \ln(x-2)$$

Τελικά $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$

B2. $h(x) = \ln(x - 2), x \in (2, +\infty)$

h συνεχής στο $(2, +\infty)$ και

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} (x-2)' = \frac{1}{x-2}, x \in (2, +\infty)$$

Είναι $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in (2, +\infty)$, άρα $h \uparrow (2, +\infty)$, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$\text{Λύνω } h(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-2) = y \Leftrightarrow x-2 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

$$\text{Πρέπει } x \in A_h \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0 \text{ ισχύει}$$

$$\text{Άρα } h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$$

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2}) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2}]$

$$\text{Θέτω } u = x-2 \xLeftrightarrow{u>0} x = u+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0, u \rightarrow 0^+$$

$$\text{Οπότε το όριο γίνεται : } \lim_{u \rightarrow 0^+} [\ln u \cdot \frac{2\ln(u+1)}{u}]$$

$$\cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(u+1)}{u} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u+1} = 1 \quad \text{DLH}$$

$$\cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Οπότε το όριο γίνεται :

$$2 \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(u+1)}{u} = 2(-\infty)1 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \quad \kappa, \mu \in \mathbb{R}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$I) \text{ Αν } \kappa \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, \kappa > 0 \\ -\infty, \kappa < 0 \end{cases}$$

άρα για $\kappa \neq 0$ η C_f δεν έχει ασύμπτωτη.

$$II) \text{ Αν } \kappa = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \cdot \frac{\mu}{1} = 0$$

άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Άρα $\kappa = 0$.

$$\text{για } \kappa = 0, \quad f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

η $y = x$ εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ άρα $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

$$\text{Γ2. } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-	+	-	
f				

$H \uparrow [-1, 1], f \downarrow (-\infty, -1], [1, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ και

τοπικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = \frac{1}{2}$

Σύνολο τιμών

$$\Delta_1 = (-\infty, -1], \quad \Delta_2 = (-1, 1), \quad \Delta_3 = [1, +\infty)$$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1

$$\text{άρα } f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2

$$\text{άρα } f(\Delta_2) = (f(-1), f(1)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3

$$\text{άρα } f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right]$$

Αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Άρα } f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$

Αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα αφού:

$$\alpha^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $\frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$, και $\frac{1}{2} \notin f(\Delta_2)$ όμως $\frac{1}{2} \in f(\Delta_3)$ με την f να είναι γνησίως μονότονη στο Δ_3 .

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\frac{1}{2} + \alpha^2 \notin f(D_f)$

Γ3.

i)

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2 + 1} dx \text{ και } I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{άρα } I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2 + 1} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1 + x^2)}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu + 2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu + 2}$$

$$\text{ii) } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2 + 1|]_1^0 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu + 2} \Leftrightarrow I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu + 2} - I_\nu \quad (1)$$

$$\text{Για } \nu = 0, \quad I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2)$$

$$\text{Για } \nu = 1, \quad I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο

$(-1,0)$ της εξίσωσης

$$g(x) + x = 0$$

Θεωρούμε $K(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

Η K συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών (g συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$K(-1) = g(-1) - 1 < 0$ καθώς $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$g(-1) < 1 \Leftrightarrow g(-1) - 1 < 0$$

$K(0) = g(0) > 0$ καθώς $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(0) > 0$

άρα $K(-1) \cdot K(0) < 0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$

τέτοιο ώστε $K(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

Η K παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων (g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) με

$$K'(x) = g'(x) + 1, x \in \mathbb{R}$$

Όμως $g'(x) \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g'(x) + 1 \neq 0$ άρα $K'(x) \neq 0$ $x \in \mathbb{R}$

Επιπλέον η $K'(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ (g' συνεχής) οπότε η K' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Αν $K'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε K γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

αν $K'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε K γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε σε κάθε περίπτωση

K γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ άρα η $K(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $g(x_1) + x_1 = 0$

Δ2. Έφσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε θα είναι και στο $x_0=0$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 (g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \Leftrightarrow$$

$$0 = 2 + 1 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ3. i) Η $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \frac{\pi}{2})$ με

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0$$

για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα f γνησίως αύξουσα

στο $[0, \frac{\pi}{2})$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 0$, συνεπώς

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } [0, \frac{\pi}{2}) \text{ (η ισότητα ισχύει μόνο για } x=0 \text{)}$$

$$3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$$

ii) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$, άρα

$$f\left([0, \frac{\pi}{2})\right) = [f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)) = [0, +\infty)$$

$$\text{Το } \frac{\pi}{3} \in f\left([0, \frac{\pi}{2})\right) \text{ άρα υπάρχει } x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}) \text{ έτσι ώστε } f(x_2) = \frac{\pi}{3}.$$

Το x_2 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0, \frac{\pi}{2})$

Δ4.

i) Η $f(x) = x^2(g(x) + x)$ με $x \in [x_1, 0]$.

Η $\kappa(x) = g(x) + x$, είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$ και $\kappa(x) \neq 0$ για κάθε

$x \in (x_1, 0]$ (από ερώτημα Δ1), συνεπώς η K διατηρεί πρόσημο στο $(x_1, 0]$.

Εφόσον $\kappa(0) = g(0) > 0$, τότε $\kappa(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, 0]$.

Συνεπώς $\kappa(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, 0]$ και

$x^2 \kappa(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$

$f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

Άλλος τρόπος

Από Δ1 η K είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και $K(0) > K(-1)$ άρα K γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε

$$x_1 \leq x \overset{\kappa \uparrow}{\Leftrightarrow} K(x_1) \leq K(x) \Leftrightarrow 0 \leq K(x) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 K(x)$$

ii) Ισχύει ότι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$, άρα εάν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , το x' και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = 0$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται από τη C_f , τον x' , $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{3}$, τότε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \overset{\Delta 3, \Delta 4}{\Leftrightarrow} \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 (g(x) + x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 (x^2 g(x) + x^3) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - 3\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = -1 - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}$$

Άρα

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \left[x^3 g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx =$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx \stackrel{\Delta 1 g(x_1) = -x_1^4}{=} x_1^4 - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) =$$

$$= \frac{x_1^4}{3} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

